

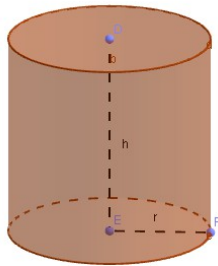


Questões sobre Corpos Redondos

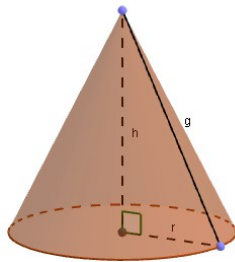
Sumário

Apêndice – Fórmulas úteis	5
1. Questões	
1.1 Nível Fácil	9
1.2 Nível Médio	15
1.3 Nível Difícil	23
2. Soluções das Questões	
2.1 Nível Fácil	31
2.2 Nível Médio	41
2.3 Nível Difícil	53
3. Gabarito Simplificado	63

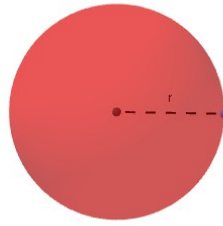
Fórmulas úteis



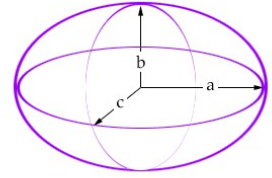
Cilindro



Cone



Esfera



Ovoide

► Cilindro

Área da base - $A_{base} = \pi r^2$

Área lateral - $A_{lateral} = 2\pi r h$

Área superficial total - $A_{superficial\ total} = 2\pi r (r + h)$

Volume - $V = \pi r^2 h$

► Cone

Área da base - $A_{base} = \pi r^2$

Área lateral - $A_{lateral} = \pi r g$

Área superficial total - $A_{superficial\ total} = \pi r (r + g)$

Volume - $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$

► Esfera

Área Superficial - $A_{superficial} = 4\pi r^2$

Área do Fuso Esférico - $A_{fuso\ esférico} = 2r\alpha$

Volume da Cunha Esférica - $V_{cunha\ esférica} = \frac{2r^3\alpha}{3}$

Volume da Esfera - $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

► Ovoide

Área da Elipse - $A_{elipse} = 4\pi ab$

Volume da Ovoide - $V_{ovoide} = \frac{4\pi abc}{3}$

Questões

1.1 Nível Fácil

Questão 1

Gabriel resolveu fazer uma leitura prévia do conteúdo que seria tratado no dia seguinte na aula de matemática de seu colégio. Mas percebeu que seu livro possuía erros tipográficos e algumas de suas definições estavam quase que totalmente ininteligíveis por conta da falta de palavras importantes, como pode ser visto no trecho abaixo:

“A intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo do cilindro recebe o nome de _____. Esta pode ter o formato de um _____, retângulo ou _____, quando se trata de um cilindro oblíquo, _____ ou equilátero, respectivamente.”

Ao assistir à aula, Gabriel conseguiu compreender a matéria, e assim pode completar as lacunas corretamente. Assinale a alternativa que apresenta as palavras escritas por Gabriel em seus respectivos espaços:

- (a) Secção transversal; paralelogramo; quadrado; reto
- (b) Secção meridiana; quadrado; paralelogramo; obtuso
- (c) Secção parabolóide; paralelogramo; quadrado; reto
- (d) Secção meridiana; paralelogramo; quadrado; reto
- (e) Secção transversal; quadrado; paralelogramo; obtuso

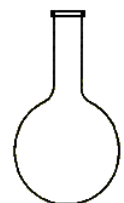
Questão 2 - UNIMAR 2003 (Universidade de Marília)

Um cone equilátero tem altura de 3 cm. Seu volume é:

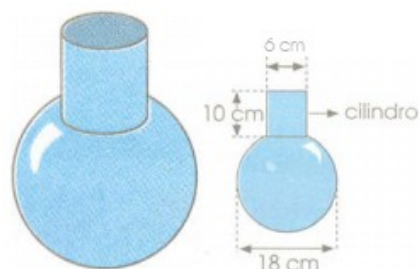
- (a) π
- (b) 2π
- (c) 3π
- (d) 4π
- (e) 6π

Questão 3

Um professor de química descuidou-se ao realizar um experimento durante uma aula de laboratório e quebrou um balão volumétrico de fundo esférico, semelhante ao mostrado ao lado. Por conta disso, ele precisou comprar um novo numa loja de acessórios e materiais para laboratórios, escolhendo um modelo com dimensões e forma representados ao lado. A capacidade aproximada desse recipiente, em ml, é: (Use $\pi = 3,14$.)



- (a) 3333,52 ml
- (b) 3234,54 ml
- (c) 3335,60 ml
- (d) 3334,68 ml
- (e) 3345,67 ml



Questão 4 - UFPE 2013 (Universidade Federal de Pernambuco)

Um cilindro reto de ferro é derretido, e o ferro obtido, que tem o mesmo volume do cilindro, é moldado em esferas com raio igual à metade do raio da base do cilindro. Se a altura do cilindro é quatro vezes o diâmetro de sua base, quantas são as esferas obtidas?

- (a) 6 (b) 8 (c) 12 (d) 16 (e) 24

Questão 5 - UNEMAT 2010 (Universidade do Estado de Mato Grosso)

Para projetar um reservatório cilíndrico de $81\pi \text{ m}^3$, dispõe-se de uma área circular de 6 m de diâmetro. A altura do reservatório deverá ser de

- (a) 6 m (b) 9 m (c) 12 m (d) 15 m (e) 18 m

Questão 6 - UEMA 2014 (Universidade Estadual do Maranhão)

Um clube de futebol, para agradar sua torcida e a seus jogadores, resolveu homenagear os jogadores que mais se destacaram no clube na última temporada. Para isso, confeccionaram-se dezesseis troféus do mesmo tamanho, na forma de bola de futebol, com raio igual a 6. Determine

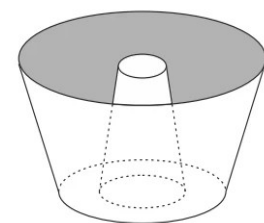
- (a) A área total das superfícies consideradas.
(b) O volume total dos troféus.



Questão 7 - ENEM 2013 (Exame Nacional do Ensino Médio)

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato indicado na figura. Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:

- (a) um tronco de cone e um cilindro.
(b) um cone e um cilindro.
(c) um tronco de pirâmide e um cilindro.
(d) dois troncos de cone.
(e) dois cilindros.



Questão 8 - ENEM 2011 (Exame Nacional do Ensino Médio)

A figura ao lado mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais. Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

- (a) pirâmide
- (b) semiesfera
- (c) tronco de cone
- (d) cilindro
- (e) cone



Disponível em: <http://mdmat.paico.ufg.br>. Acesso em: 1 maio 2010.

Questão 9 - UFSC 2014 (Universidade Federal de Santa Catarina)

Para a festa de aniversário de sua filha, Dona Maricota resolveu confeccionar chapéus para as crianças. Para tanto, cortou um molde com a forma de semicírculo cujo raio mede 20 cm. Ao montar o molde, com o auxílio de um adesivo, gerou um cone cuja área lateral é igual à área do molde. Dessa forma, a altura desse cone, em centímetros, é igual a:



- (a) $10\sqrt{3}$
- (b) $20\sqrt{3}$
- (c) $10\sqrt{5}$
- (d) $20\sqrt{5}$
- (e) $30\sqrt{5}$

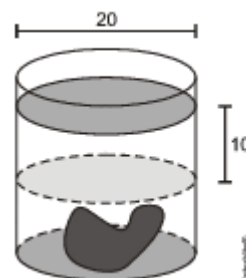
Questão 10

Os catetos de um triângulo retângulo medem b e c e a sua área mede 2 m^2 . O cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto b tem volume $16\pi \text{ m}^3$. O comprimento do cateto c é

- (a) 9 m
- (b) 12 m
- (c) 15 m
- (d) 18 m
- (e) 22 m

Questão 11 - IFAL 2011 (Instituto Federal de Alagoas)

Arquimedes, para achar o volume de um objeto de forma irregular, mergulhou-o num tanque cilíndrico circular reto contendo água. O nível da água subiu 10 cm sem transbordar. Se o diâmetro do tanque é 20 cm, então o volume do objeto é:



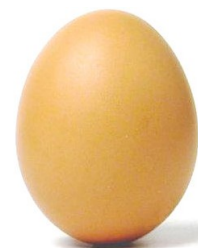
- (a) 1000π
- (b) 2000π
- (c) 3000π
- (d) 4000π
- (e) 5000π

Questão 12

Prove que, se multiplicarmos o raio da base de um cilindro por uma constante k e não houver modificações em sua altura, seu volume será multiplicado por k^2 .

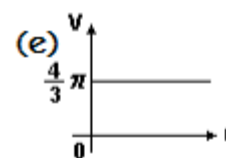
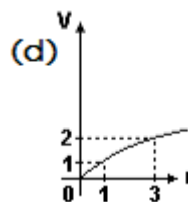
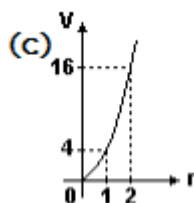
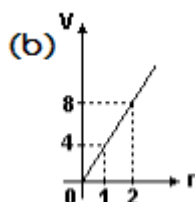
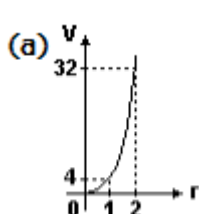
Questão 13

Do ponto de vista alimentício, o **Ovo** é um alimento de origem animal, podendo pertencer a diversas espécies, incluindo aves, répteis, anfíbios e peixes. São consumidos pelos humanos ao longo de milhares de anos. Sabendo que este tem um formato ovoide, com altura de 5,4 cm e diâmetro 4 cm, calcule seu volume.



Questão 14 - UFAL 2000 (Universidade Federal de Alagoas)

Dos gráficos abaixo, aquele que mais se aproxima do gráfico do volume de uma esfera em função de seu raio é



Questão 15 - KSF 2015 (Kangourou Sans Frontières)

Um copo tem a forma de um cone truncado, conforme figura. Pauline quer colar um plástico colorido ao redor do copo, do lado de fora. Como ela deve cortar o plástico para colar perfeitamente na lateral do copo, sem enrugur?



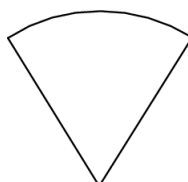
(a) retângulo



(b) trapezoide



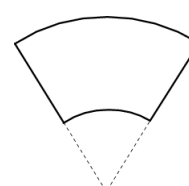
(c) setor circular



(d) tira curva de lados paralelos



(e) parte de setor circular



Questão 16

Tem-se dois cones, sendo o cone A de raio de base 3 e altura 5 e o cone B de raio da base 5 e altura 3. O valor de $V_A \cdot V_B \cdot \pi^{-2}$ é

(a) 350

(b) 375

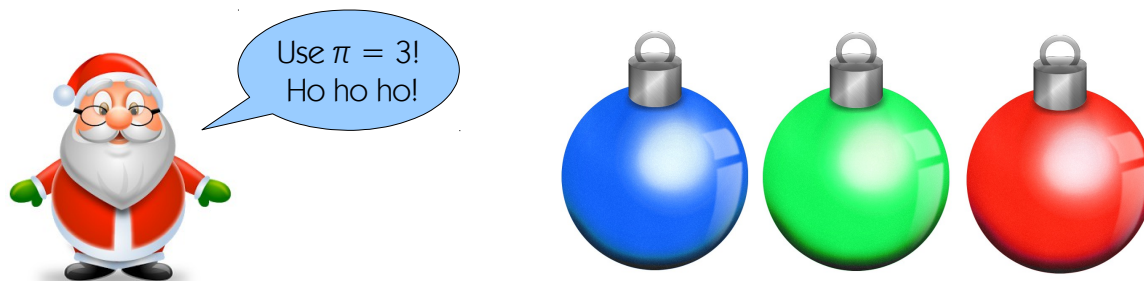
(c) 400

(d) 450

(e) 510

Questão 17

Papai Noel quer comprar bolinhas de Natal para enfeitar a árvore da fábrica de brinquedos do Polo Norte. Então, ele resolveu encomendar um pacote de dimensões quadradas com 45 cm de lado. Cada uma das bolinhas compradas tem diâmetro de 5 cm. Desconsiderando os espaços vazios do pacote, determine a quantidade de bolinhas de Natal compradas pelo Papai Noel.



Questão 18 - PUCSP 2002 (Pontifícia Universidade Católica - SP)

A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.



Suponha que cada esfera tem 10,5cm de diâmetro e que o bastão tem 50cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4cm. Se a densidade do ferro é $7,8\text{g/cm}^3$, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use $\pi = \frac{22}{7}$)

- (a) 18 (b) 16 (c) 15 (d) 12 (e) 10

Questão 19

Uma ampulheta é formada por dois cones circulares retos idênticos, tendo cada um deles 6 cm de diâmetro na base e 10 cm de altura. Um deles está totalmente cheio de areia e escoar para outro cone à razão de $0,6\text{ cm}^3$ por segundo. Qual o tempo necessário para escoar totalmente a areia de um cone para outro? (Use $\pi = 3,14$ para efeito de cálculo.)



Questão 20

O Zeppelin é um tipo de aeróstato rígido, mais especificamente um dirigível, cujo nome é uma homenagem ao conde alemão Ferdinand Von Zeppelin, que foi pioneiro no desenvolvimento de dirigíveis rígidos no início do século XX.



As primeiras ideias de Zeppelin foram formuladas em 1874 e desenvolvidas em detalhes em 1893, sendo patenteadas na Alemanha em 1895 e nos Estados Unidos em 1899. Considerando que este dirigível tenha um formato ovoide e dimensões de 236,6 metros de comprimento e raio de 15 metros, determine seu volume.

Questão 21 - UFF 1997 (Universidade Federal Fluminense)

Um certo tipo de refrigerante é comercializado em duas embalagens geometricamente semelhantes. Uma contém 625 mL do produto, e a outra, 320 mL. Qual é a razão entre as alturas dessas embalagens?



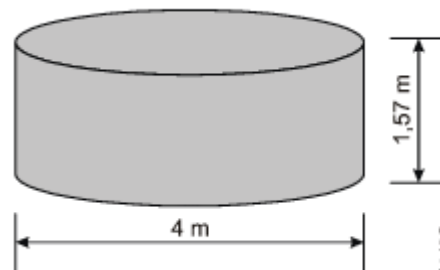
1.2 Nível Médio

Questão 1 – UNESP 1990 (Universidade Estadual Paulista)

Um cone reto tem raio da base R e altura H . Secciona-se esse cone por um plano paralelo à base e distante h do vértice, obtendo-se um cone menor e um tronco de cone, ambos de mesmo volume. Determine a razão $\frac{h}{H}$.

Questão 2 – ACAFE 2012 (Associação Catarinense de Fundações Educacionais)

Uma piscina cilíndrica, cujas dimensões são indicadas na figura ao lado, e cheia por uma mangueira a taxa de 1570 L por hora.



I. A função $h(t)$, em que h indica a altura da água alcançada pela piscina em metros e t indica o tempo em horas, é uma função do segundo grau.

II. O enchimento da piscina será interrompido quando a piscina estiver completamente cheia; neste caso, pode-se dizer que a função $h(t)$ tem como domínio o conjunto $D = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 12,56\}$.

III. O tempo total de enchimento dessa piscina será de 12 horas e 56 minutos.

São corretas as asserções

- (a) I (b) II (c) III (d) I e II (e) II e III

Questão 3 – UNESP 2014 (Universidade Estadual Paulista)

Prato da culinária japonesa, o temaki é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.



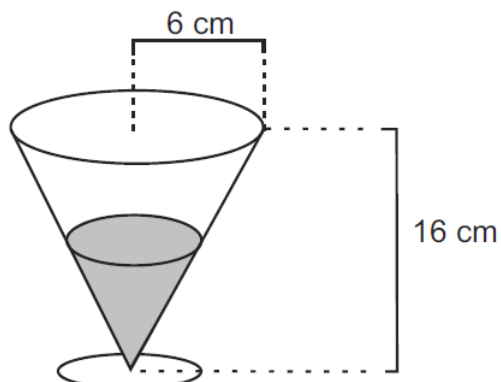
Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% do volume do seu recheio, que a densidade do salmão é de $0,35 \text{ g/cm}^3$, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

- (a) 46,8 (b) 58,5 (c) 54 (d) 50,4 (e) 52

Questão 4 – UESP 2008 (Universidade Metodista de São Paulo)

Um copo com a forma de um cone, com 6 cm de raio da base e 16 cm de altura, como o da figura abaixo, estava totalmente cheio de suco. Júlia tomou 75% desse suco. O volume de suco que restou no copo é, aproximadamente,

- (a) $36\pi \text{ cm}^3$
- (b) $48\pi \text{ cm}^3$
- (c) $56\pi \text{ cm}^3$
- (d) $72\pi \text{ cm}^3$
- (e) $144\pi \text{ cm}^3$



Questão 5 – OBM 2004 (Olimpíada Brasileira de Matemática)

Uma ampulheta é formada por dois cones idênticos. Inicialmente, o cone superior está cheio de areia e o cone inferior está vazio. A areia flui do cone superior para inferior com vazão constante. O cone superior se esvazia em exatamente uma hora e meia. Quanto tempo demora até que a altura da areia no cone inferior seja metade da altura da areia no cone superior?

- (a) 30min
- (b) 10h
- (c) 1h03min20s
- (d) 1h10min12s
- (e) 1h14min30s

Questão 6

Após participar do filme Frozen, Olaf resolveu tirar férias indo à praia. Para lhe fazer companhia, resolveu convidar seus amigos Olavo e Olacyr.



Olavo



Olaf



Olacyr

Eles combinaram de se encontrar em Arendelle para partirem juntos. Durante a viagem, Olaf percebeu que Olavo, Olacyr têm a mesma altura de 1,2m, e a altura de suas cabeças é metade da altura de seus corpos, sendo que estas têm uma forma esférica. Já Olavo e Olacyr viram que Olaf tem uma cabeça de forma ovoide cuja altura corresponde a terça parte de sua altura total e o diâmetro é metade da altura da cabeça e seu corpo é formado por duas formas esféricas, sendo que uma tem o triplo da altura da outra. Sabe-se que os três tem alturas iguais e que a densidade da neve é de 90 kg/m^3 .

Ao chegarem, eles combinam de dividir um apartamento no 28º andar de um prédio. O único jeito para chegar lá é utilizar um pequeno elevador cuja capacidade máxima é de 60 kg. É possível que Olaf, Olavo e Olacyr entrem juntos no elevador? Use $\pi = 3$ e justifique sua resposta.

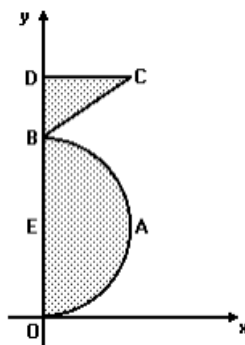
Questão 7 – ORMSC 2012 (Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina)

O dobro da medida do raio da esfera A é equivalente ao volume da esfera B. A razão entre os volumes das duas esferas é $216\pi^3$. O raio da esfera B mede:

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

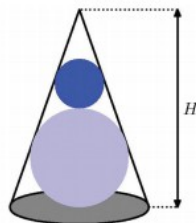
Questão 8 – UFMG 1996 (Universidade Federal do Mato Grosso)

A região sombreada na figura a seguir sofre uma rotação completa em torno do eixo y. Sejam os pontos $O=(0,0)$; $A=(1,1)$; $B=(0,2)$; $C=(1,3)$; $D=(0,3)$ e $E=(0,1)$. OAB é uma semicircunferência com centro em E. Sendo V a medida do volume do sólido de revolução gerado, calcule o valor de $\frac{36V}{5\pi}$.



Questão 9 – UFRJ 2008 (Universidade Federal do Rio de Janeiro)

Um cone circular reto de altura H circunscreve duas esferas tangentes, como mostra a figura abaixo. A esfera menor tem raio de 5 cm e a esfera maior tem raio equivalente ao diâmetro da esfera menor.



Qual é o valor de H?

- (a) 25 cm (b) 30 cm (c) 35 cm (d) 40 cm (e) 45 cm

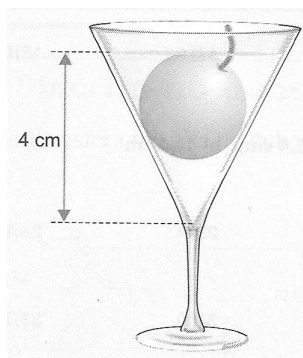
Questão 10 – OBM 1997 (Olimpíada Brasileira de Matemática)

O reservatório de um caminhão-tanque tem a forma de um cilindro de revolução com eixo horizontal e está cheio até $\frac{3}{4}$ da altura. A fração da capacidade total do reservatório que está ocupada é de aproximadamente:

- (a) 80% (b) 75% (c) 68% (d) 60% (e) 56%

Questão 11 – FGV 2012 (Fundação Getúlio Vargas)

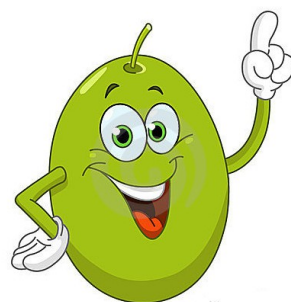
Um cálice com a forma de um cone mantém $V \text{ cm}^3$ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro 2cm, é colocada dentro do cálice, supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice, e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V .



Questão 12

A azeitona é o fruto da oliveira (*Olea europaea*), também chamado de verde-oliva. É de grande importância agrícola na região mediterrânea como fonte de óleo de oliva. Sendo a , b e c as dimensões da azeitona, determine o valor de abc , sabendo que num pote cilíndrico de raio de base 3,5 cm e altura 24 cm cabem 147 azeitonas. Desconsidere possíveis espaços vazios no pote.

- (a) 1 (b) 1,5 (c) 2 (d) 2,5 (e) 3



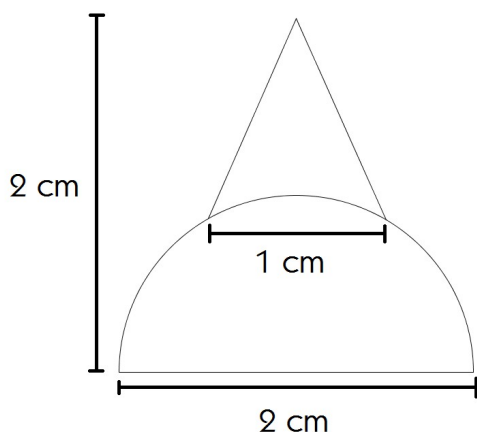
Questão 13 – ITA 2015 (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, sem haver transbordamento, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

- (a) $\sqrt[3]{2} - h$ (b) $\sqrt[3]{2} - 1$ (c) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$ (d) h (e) $2h$

Questão 14

Um tipo de chocolate muito conhecido está mostrado ao lado. Cada um deles possui massa de 4,5g. Para calcular o volume médio de uma unidade, Gabriel fez um esboço de um deles, decompondo-o em um cone e uma semiesfera, cujas dimensões estão indicadas.



Usando $\pi = 3$ sua vida ficará mais doce!



Determine a densidade do chocolate utilizado em g/cm³.

- (a) 1,2 (b) 1,5 (c) 2 (d) 3 (e) 4,5

Questão 15 – PUCSP 2002 (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo) – Adaptado

Normalmente, quando andamos sob chuva, as gotas que caem não nos machucam. Isso ocorre porque as gotas d'água não estão em queda livre, mas sujeitas a um movimento no qual a resistência do ar não pode ser desconsiderada.

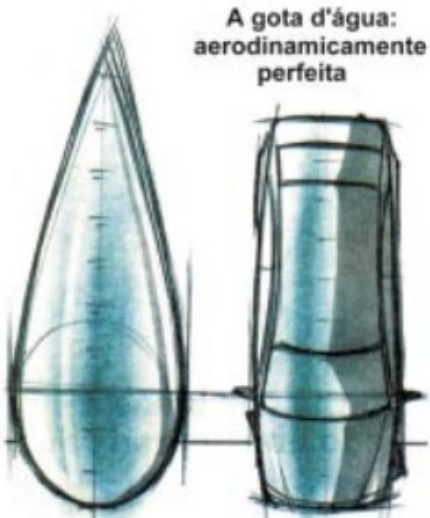
A resistência do ar é uma força cujo sentido é sempre contrário ao sentido do movimento do objeto e seu valor é tanto maior quanto maior for a velocidade do corpo em movimento.

Para uma gota em queda, a velocidade aumenta até um valor máximo denominado velocidade limite. Como as gotas têm, em geral, pequena massa e baixa velocidade limite - em média 18km/h - o impacto, normalmente, não nos causa sensação dolorosa. O texto abaixo se relaciona com o descrito. Leia-o com atenção e responda ao que se solicita.

CORTANDO O AR

Vencer a resistência do ar ao deslocamento do carro é função da aerodinâmica. A forma ideal de qualquer modelo seria a criada pela natureza na gota d'água", explica o chefe de Design da Volkswagen do Brasil, Luiz Alberto Veiga (que preparou para o jornal "O Estado de São Paulo" os desenhos do quadro abaixo).

**A gota d'água:
aerodinamicamente
perfeita**



EM BUSCA DO MODELO IDEAL



Modelos hatch têm mais problemas de aerodinâmica, porque criam áreas de maior turbulência atrás – o efeito "desentupidor de pia", que dificulta o avanço.

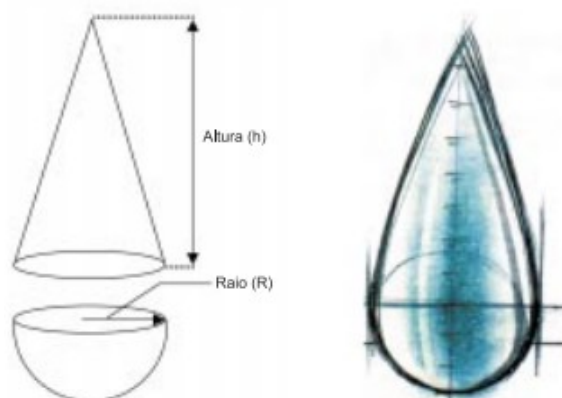


O desenho dos sedãs e cupês permite que o ar flua com mais facilidade ao longo da carroceria, reduzindo a turbulência e, portanto, o repuxo.



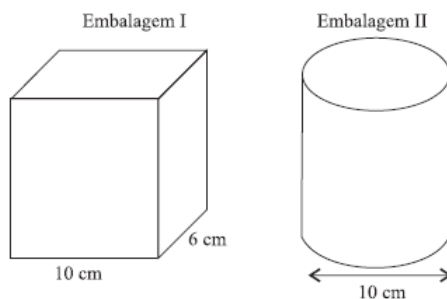
A forma ideal de carro seria a de uma gota cortada longitudinalmente: isso não provocaria turbulência atrás, facilitando o deslocamento.

Numa boa aproximação, uma gota d'água pode ser considerada como o resultado da união de dois sólidos: uma semi-esfera e um cone (veja a figura seguinte). Calcule a relação entre a altura (h) do cone e o raio (R) da semi-esfera, considerando que seus volumes são iguais.



Questão 16 – UFABO 2006 (Universidade Federal do Grande ABC)

O cereal da marca Saúde é comercializado em dois tipos de embalagem, pelo mesmo preço. A embalagem I tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo e a embalagem II tem forma de um cilindro reto. Ambas têm a mesma altura.



Supondo que as duas embalagens estejam completamente preenchidas pelo cereal, pode-se afirmar que quem compra Saúde na embalagem II em vez da embalagem I compra, aproximadamente,

- (a) 10% a mais de cereal.
- (b) 30% a mais de cereal.
- (c) 45% a mais de cereal.
- (d) 8% a menos de cereal.
- (e) 25% a menos de cereal.

Questão 17

O professor Paulo Saldiva pedala 6 km em 22 minutos de casa para o trabalho, todos os dias. Nunca foi atingido por um carro. Mesmo assim, é vítima diária do trânsito de São Paulo: a cada minuto sobre a bicicleta, seus pulmões são envenenados com 3,3 microgramas de poluição particulada – poeira, fumaça, fuligem, partículas de metal em suspensão, sulfatos, nitratos, carbono, compostos orgânicos e outras substâncias nocivas.

ESCOBAR, H. Sem Ar. *O Estado de São Paulo*. Ago. 2008.

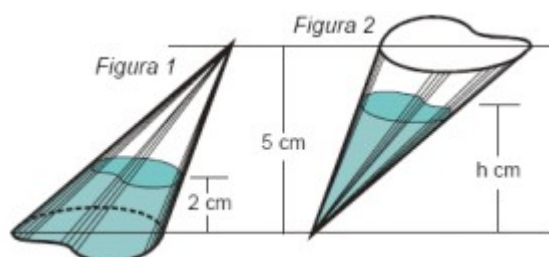
Considere que seja possível armazenar toda a poluição particulada que o professor inala durante 1 ano, considerando apenas a ida de casa para o trabalho, num cilindro reto equilátero de densidade $0,01 \text{ g/cm}^3$. A altura desse cilindro será, em cm,

- (a) 0,75
- (b) 1
- (c) 1,5
- (d) 1,75
- (e) 2

1.3 Nível Difícil

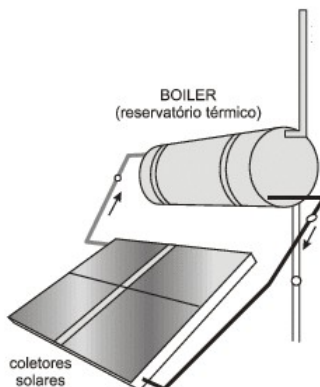
Questão 1 - UFRJ 2005 (Universidade Federal do Rio de Janeiro)

Uma ampola de vidro tem o formato de um cone cuja altura mede 5 cm. Quando a ampola é posta sobre uma superfície horizontal, a altura do líquido em seu interior é de 2 cm (Figura 1). Determine a altura h do líquido quando a ampola é virada de cabeça para baixo (Figura 2).



Questão 2 - UFU 2011 (Universidade Federal de Uberlândia)

Ao assistir a uma reportagem na TV sobre o impacto do crescimento demográfico nos recursos hídricos, o Sr. José decidiu adotar medidas que auxiliam na preservação de recursos naturais. Ele construiu um reservatório para captação de água da chuva e também instalou um aquecedor solar em sua residência. O sistema de aquecimento solar é composto de coletores solares (placas) e um reservatório térmico chamado boiler, o qual tem o formato de um cilindro circular reto, como mostra figura abaixo.



Por sua vez, foi escolhido e construído um reservatório para a captação de água da chuva na forma de um prisma reto cuja base é um quadrado.

Sabe-se que:

- I. o lado da base do prisma (que corresponde ao reservatório) mede 2 metros e o raio da base do cilindro (que corresponde boiler) mede $\frac{1}{2}$ metro;
- II. a área lateral do prisma (reservatório) é igual ao dobro da área lateral do cilindro (boiler).

A partir das considerações acima, redija um texto que relacione o volume do reservatório e o volume do boiler. Utilizando-o estabeleça o valor da razão (volume do reservatório) / (volume do boiler).

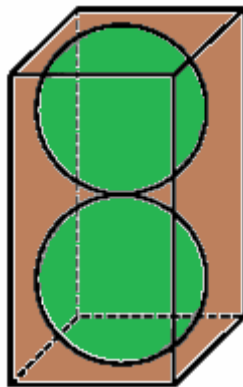
Questão 3 - ESPCEX (AMAN) 2015 (Escola Preparatória de Cadetes do Exército (Academia Militar das Agulhas Negras))

Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1 cm. O volume desse cone em cm^3 é:

- (a) $\frac{1}{3}\pi$ (b) $\frac{2}{3}\pi$ (c) $\frac{4}{3}\pi$ (d) $\frac{8}{3}\pi$ (e) 3π

Questão 4 - FATEC 2003 (Faculdade de Tecnologia de São Paulo)

Duas esferas maciças iguais e tangentes entre si estão inscritas em um paralelepípedo reto-retângulo oco, como mostra a figura abaixo. Observe que cada esfera tangencia as quatro faces laterais e uma das bases do paralelepípedo. O espaço entre as esferas e o paralelepípedo está preenchido com um líquido. Se a aresta da base do paralelepípedo mede 6 cm, o volume do líquido nele contido, em litros, é aproximadamente igual a



- (a) 0,144 (b) 0,206 (c) 1,44 (d) 2,06 (e) 20,6

Questão 5

A CET (Companhia de Engenharia de Tráfego) de São Paulo necessita encomendar 40 cones grandes e 25 cones pequenos. O cone grande tem altura de 72 cm e utiliza uma base de sustentação quadrada de 40 cm, no qual há um círculo concêntrico a esse quadrado com diâmetro 25 cm. O cone pequeno de altura 50 cm tem $\frac{256}{625}$ do volume do cone grande e a base quadrada é proporcional ao diâmetro do cone grande.

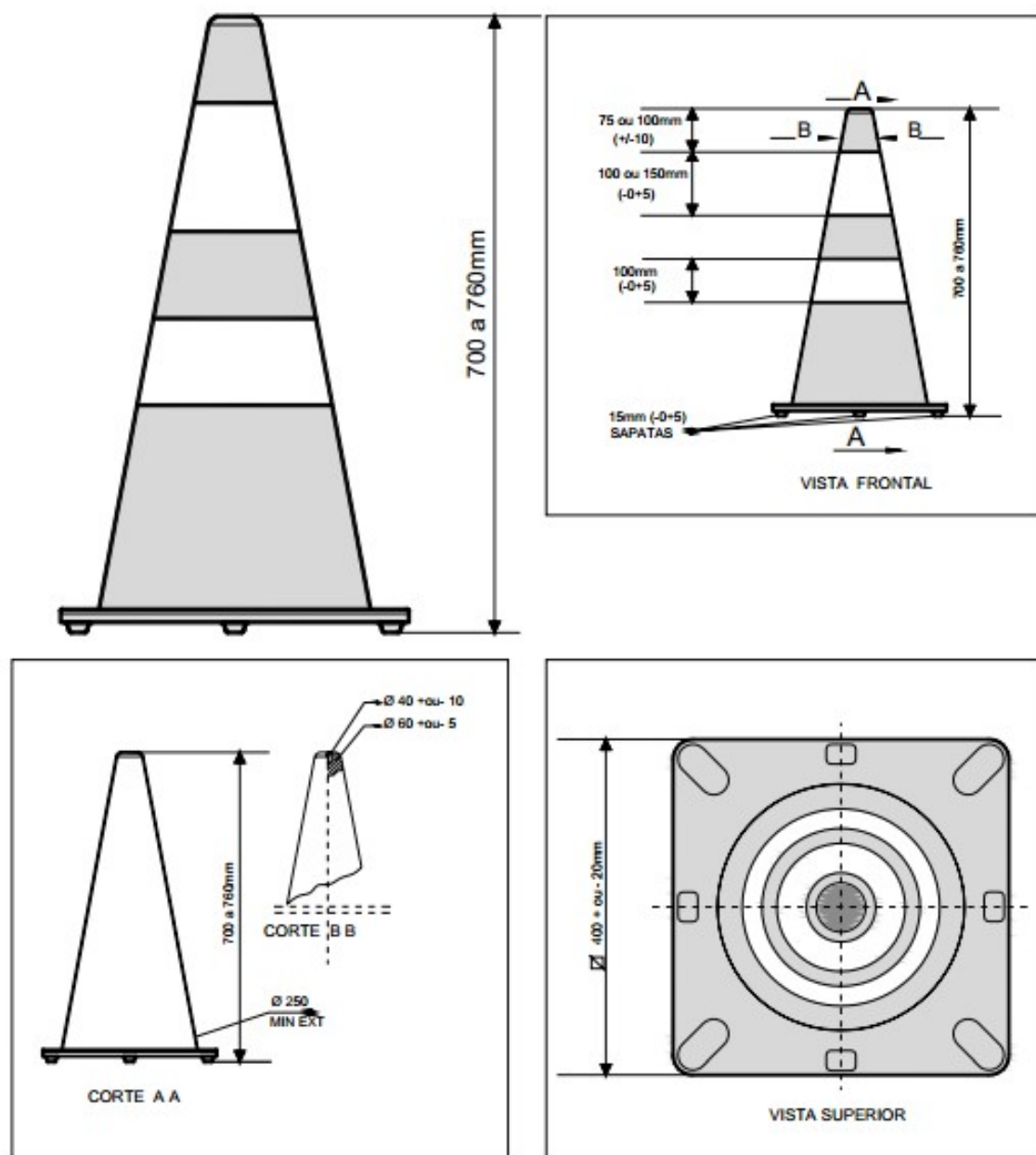


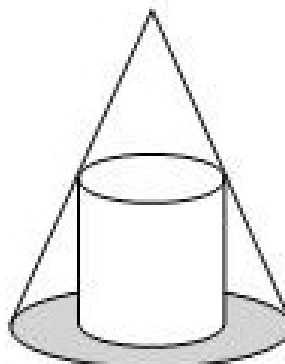
Figura A1 – Cone para sinalização viária

Determine a área total necessária de plástico para produzir todos esses cones. Despreze a espessura do cone e considere-os com formato perfeito de cone, supondo sua extremidade fechada.

Questão 6 - CEFERJ 2011 (Centro Estadual de Estatísticas, Pesquisas e Formação de Servidores do Rio de Janeiro)

A figura abaixo mostra um cilindro reto inscrito em um cone: a base inferior do cilindro está sobre a base do cone, e a circunferência da base superior do cilindro está sobre a superfície lateral do cone. Sabe-se que a altura do cilindro é a metade da altura do cone e que o volume do cilindro é de 150 cm^3 . O volume do cone é:

- (a) 200 cm^3
- (b) 240 cm^3
- (c) 300 cm^3
- (d) 360 cm^3
- (e) 400 cm^3



Questão 7

Douglas está com fome e pretende ir à sorveteria para consumir um delicioso sorvete de baunilha. O formato do sorvete comprado é semelhante ao mostrado abaixo, tendo a forma de um cone circular reto de 12 cm de altura e 5 cm de raio da base.



Sabendo que 100 g de sorvete fornecem uma energia de 200 kcal , determine a quantidade mínima de sorvetes de baunilha que Douglas deve comprar para que ele supra suas necessidades energéticas diárias de 8400 kJ .

Dados: densidade média do sorvete de baunilha: 475 g/l , $\pi = 3$, $1\text{ cal} = 4,2\text{ J}$.

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4
- (e) 5

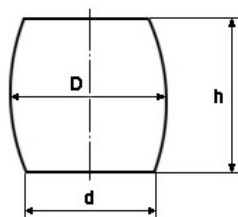
Questão 8

Como já foi visto anteriormente (vide questão 15 do nível médio), uma gota d'água pode ser decomposta em um cone e uma semiesfera. Descreva uma fórmula para determinar seu volume total e determine o maior volume possível dessa gota se $h + R = 8$.



Questão 9

Na série de televisão mexicana criada por Roberto Gómez Bolaños, El Chavo del Ocho (conhecida como Chaves no Brasil), o personagem principal, Chaves, frequentemente aparece dentro de seu barril, utilizado em várias situações como esconderijo. Considere o seguinte esboço simplificado do barril:



A fórmula que calcula o volume desse barril é $V = \frac{\pi \cdot h (2D^2 + d^2)}{12}$. Considere um barril hipotético de altura $\frac{12}{11}m$. Se d , D e V são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão x , e d e D são termos consecutivos de uma progressão aritmética, também de razão x , determine o volume desse barril. (Use $\pi = 3$.)

Questão 10

Considere um cilindro de altura h . Seja $V(h)$ o volume do cilindro em função de sua altura. É válido que

$$V(x^2 + xy + V(y)) = (V(x))^2 + xV(y) + y$$

Para todo valor de x e y . O valor do raio da base desse cilindro é:

- (a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ (e) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$

Questão 11

Considere um cone cuja altura é dada por h e o raio da base é dado por r . Sabe-se que h e r são números reais tais que $h^2 + r^2 = 1$. Determine o valor máximo para o volume desse cone.

Questão 12

O volume de um cone de raio 1 e altura sendo o triplo do raio da base é numericamente equivalente a área superficial de uma esfera. Calcule:

- (a) A área superficial total de um cilindro reto equilátero com o mesmo raio da esfera;
- (b) O volume de um cone com medida de geratriz equivalente ao quádruplo do raio da esfera e área superficial total igual à do cilindro calculada anteriormente.

Soluções das Questões

2.1 Nível Fácil

Questão 1

Gabriel resolveu fazer uma leitura prévia do conteúdo que seria tratado no dia seguinte na aula de matemática de seu colégio. Mas percebeu que seu livro possuía erros tipográficos e algumas de suas definições estavam quase que totalmente ininteligíveis por conta da falta de palavras importantes, como pode ser visto no trecho abaixo:

“A intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo do cilindro recebe o nome de _____. Esta pode ter o formato de um _____, retângulo ou _____, quando se trata de um cilindro oblíquo, _____ ou equilátero, respectivamente.”

Ao assistir à aula, Gabriel conseguiu compreender a matéria, e assim pode completar as lacunas corretamente. Assinale a alternativa que apresenta as palavras escritas por Gabriel em seus respectivos espaços:

- (a) Secção transversal; paralelogramo; quadrado; reto
- (b) Secção meridiana; quadrado; paralelogramo; obtuso
- (c) Secção parabolóide; paralelogramo; quadrado; reto
- (d) Secção meridiana; paralelogramo; quadrado; reto
- (e) Secção transversal; quadrado; paralelogramo; obtuso

Solução

Completando corretamente o trecho, temos:

*“A intersecção do cilindro com um plano que contém o eixo do cilindro recebe o nome de **Secção meridiana**. Esta pode ter o formato de um **paralelogramo**, retângulo ou **quadrado**, quando se trata de um cilindro oblíquo, **reto** ou equilátero, respectivamente.”*

Dessa forma, a alternativa correta é a (d).

Questão 2 - UNIMAR 2003 (Universidade de Marília)

Um cone equilátero tem altura de 3 cm. Seu volume é:

- (a) π
- (b) 2π
- (c) 3π
- (d) 4π
- (e) 6π

Solução

Num cone equilátero, a medida da geratriz é equivalente à medida do diâmetro de sua base. Daí, podemos dizer que a geratriz tem o dobro da medida do raio desse cone. Então

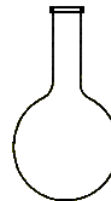
$$h^2 + r^2 = g^2 \Leftrightarrow 3^2 + r^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow 9 + r^2 = 4r^2 \Leftrightarrow 3r^2 = 9 \Leftrightarrow r = \sqrt{3}.$$

O volume do cone é dado por $V = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi (\sqrt{3})^2 \cdot 3}{3} \Rightarrow V = 3\pi$.

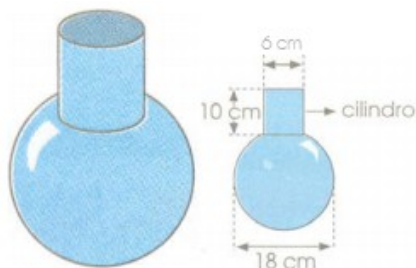
A resposta é a alternativa (c).

Questão 3

Um professor de química descuidou-se ao realizar um experimento durante uma aula de laboratório e quebrou um balão volumétrico de fundo esférico, semelhante ao mostrado ao lado. Por conta disso, ele precisou comprar um novo numa loja de acessórios e materiais para laboratórios, escolhendo um modelo com dimensões e forma representados ao lado. A capacidade aproximada desse recipiente, em ml, é: (Use $\pi = 3,14$.)



- (a) 3333,52 ml
- (b) 3234,54 ml
- (c) 3335,60 ml
- (d) 3334,68 ml
- (e) 3345,67 ml



Solução

O volume do balão volumétrico será dado pela soma dos volumes do cilindro e da esfera que o compõe, ou seja, $V_{\text{balão volumétrico}} = V_{\text{cilindro}} + V_{\text{esfera}}$.

O cilindro tem 10 cm de altura e $\frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$ de raio. Então, seu volume será

$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot 3^2 \cdot 10 \Rightarrow V_{\text{cilindro}} = 90\pi$. Já a esfera tem diâmetro de 18 cm e, portanto, seu raio é de 9 cm. O volume será $V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V_{\text{esfera}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 9^3}{3} \Rightarrow V_{\text{esfera}} = 972\pi$.

O volume total do balão volumétrico será $V_{\text{balão volumétrico}} = 90\pi + 972\pi \Rightarrow V_{\text{balão volumétrico}} = 1062\pi$.

Para $\pi = 3,14$, o volume será de 3334,68 ml. A resposta é a alternativa (d).

Questão 4 - UFPE 2013 (Universidade Federal de Pernambuco)

Um cilindro reto de ferro é derretido, e o ferro obtido, que tem o mesmo volume do cilindro, é moldado em esferas com raio igual à metade do raio da base do cilindro. Se a altura do cilindro é quatro vezes o diâmetro de sua base, quantas são as esferas obtidas?

- (a) 6
- (b) 8
- (c) 12
- (d) 16
- (e) 24

Solução

Seja r o raio do cilindro. O raio de cada esfera será $\frac{r}{2}$ e a altura do cilindro será $h = 8r$. Com

$$\text{isso, temos: } Q_{\text{esferas}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{\frac{4\pi r^3}{3}} \Rightarrow Q_{\text{esferas}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 8r}{\frac{4\pi r^3}{3}} \Rightarrow Q_{\text{esferas}} = \frac{24\pi r^3}{4\pi r^3} \Rightarrow Q_{\text{esferas}} = 6.$$

Logo, serão obtidas 6 esferas. Alternativa (a).

Questão 5 - UNEMAT 2010 (Universidade do Estado de Mato Grosso)

Para projetar um reservatório cilíndrico de $81\pi \text{ m}^3$, dispõe-se de uma área circular de 6 m de diâmetro. A altura do reservatório deverá ser de

- (a) 6 m (b) 9 m (c) 12 m (d) 15 m (e) 18 m

Solução

Sabe-se que o volume de um cilindro é dado por $V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 h$. Substituindo os dados,

$$81\pi = \pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{81}{9} \Rightarrow h = 9 \text{ m}.$$

A resposta é a (b).

Questão 6 - UEMA 2014 (Universidade Estadual do Maranhão)

Um clube de futebol, para agradar sua torcida e a seus jogadores, resolveu homenagear os jogadores que mais se destacaram no clube na última temporada. Para isso, confeccionaram-se dezesseis troféus do mesmo tamanho, na forma de bola de futebol, com raio igual a 6. Determine

- (a) A área total das superfícies consideradas.
(b) O volume total dos troféus.



Solução

(a) A área total dos troféus será $A_{\text{total}} = 16(A_{\text{superficial}}) \Rightarrow A_{\text{total}} = 16 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 6^2 \Rightarrow A_{\text{total}} = 2304\pi$.

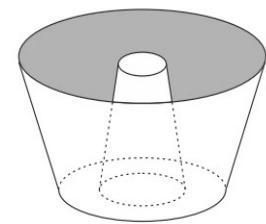
(b) O volume total dos troféus em forma de bola de futebol será

$$V_{\text{total}} = 16(V_{\text{troféu}}) \Rightarrow V_{\text{total}} = 16\left(\frac{4 \cdot \pi \cdot 6^3}{3}\right) \Rightarrow V_{\text{total}} = \frac{13824 \cdot \pi}{3} \Rightarrow V_{\text{total}} = 4608\pi.$$

Questão 7 - ENEM 2013 (Exame Nacional do Ensino Médio)

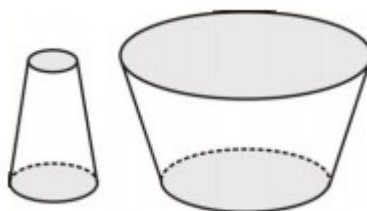
Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato indicado na figura. Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:

- (a) um tronco de cone e um cilindro.
- (b) um cone e um cilindro.
- (c) um tronco de pirâmide e um cilindro.
- (d) dois troncos de cone.
- (e) dois cilindros.



Solução

Fazendo o desdobramento da forma tem-se a figura abaixo que são dois troncos de cone. A resposta é (d).



Questão 8 - ENEM 2011 (Exame Nacional do Ensino Médio)

A figura ao lado mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais. Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

- (a) pirâmide
- (b) semiesfera
- (c) tronco de cone
- (d) cilindro
- (e) cone



Disponível em: <http://mdmat.psic.ufrgs.br>. Acesso em: 1 maio 2010.

Solução

A sombrinha representa um sólido geométrico chamado cone. A resposta é a alternativa (e).

Questão 9 - UFSC 2014 (Universidade Federal de Santa Catarina)

Para a festa de aniversário de sua filha, Dona Maricota resolveu confeccionar chapéus para as crianças. Para tanto, cortou um molde com a forma de semicírculo cujo raio mede 20 cm. Ao montar o molde, com o auxílio de um adesivo, gerou um cone cuja área lateral é igual à área do molde. Dessa forma, a altura desse cone, em centímetros, é igual a:



- (a) $10\sqrt{3}$
- (b) $20\sqrt{3}$
- (c) $10\sqrt{5}$
- (d) $20\sqrt{5}$
- (e) $30\sqrt{5}$

Solução

Se o raio do molde mede 20 cm, sua área será $A_{\text{molde}} = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} \Rightarrow A_{\text{molde}} = 200\pi$. Como esta é igual

à área lateral do cone, sendo que sua geratriz é equivalente ao raio do molde, temos

$$A_{\text{lateral}} = 200\pi \Rightarrow \pi r g = 200\pi \Rightarrow 20r = 200 \Rightarrow r = 10.$$

Assim, a altura do cone será $h^2 = g^2 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{20^2 - 10^2} \Rightarrow h = 10\sqrt{3}$.

A alternativa correta é a (c).

Questão 10

Os catetos de um triângulo retângulo medem b e c e a sua área mede 2 m^2 . O cone obtido pela rotação do triângulo em torno do cateto b tem volume $16\pi \text{ m}^3$. O comprimento do cateto c é

- (a) 9 m (b) 12 m (c) 15 m (d) 18 m (e) 22 m

Solução

A rotação em torno do cateto b do triângulo retângulo formará um cone de altura b e raio da

base c . Assim, $V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot c^2 \cdot b}{3} = 16\pi \Rightarrow b \cdot c^2 = 48$.

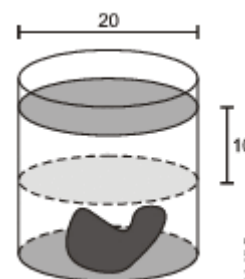
Mas como a área desse triângulo é 2 m^2 , então $A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow \frac{b \cdot c}{2} = 2 \Rightarrow b \cdot c = 4$.

Daí, $b \cdot c^2 = 48 \Rightarrow (b \cdot c) \cdot c = 48 \Rightarrow 4c = 48 \Rightarrow c = 12$.

A medida do cateto c é de 12 m e a resposta é a (b).

Questão 11 - IFAL 2011 (Instituto Federal de Alagoas)

Arquimedes, para achar o volume de um objeto de forma irregular, mergulhou-o num tanque cilíndrico circular reto contendo água. O nível da água subiu 10 cm sem transbordar. Se o diâmetro do tanque é 20 cm, então o volume do objeto é:



- (a) 1000π (b) 2000π (c) 3000π (d) 4000π (e) 5000π

Solução

O volume do objeto será dado pela diferença entre os volumes de água do tanque cilíndrico antes e depois de mergulhar o objeto, ou seja, $V_{\text{objeto}} = V_{\text{depois}} - V_{\text{antes}}$. Assim, temos

$V_{\text{objeto}} = \pi \cdot 10^2 \cdot (h + 10) - \pi \cdot 10^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{objeto}} = 100h\pi + 1000\pi - 100h\pi \Rightarrow V_{\text{objeto}} = 1000\pi$. A resposta é a alternativa (a).

Questão 12

Prove que, se multiplicarmos o raio da base de um cilindro por uma constante k e não houver modificações em sua altura, seu volume será multiplicado por k^2 .

Solução

O volume inicial do cilindro será $V_{cilindro} = \pi r^2 h$. O volume do novo cilindro será dado por $V_{cilindro\ novo} = \pi (k \cdot r)^2 h$. Agora, basta perceber que $k^2 \cdot V_{cilindro} = k^2 (\pi r^2 h) \Rightarrow k^2 \cdot V_{cilindro} = \pi (k \cdot r)^2 h \Rightarrow k^2 \cdot V_{cilindro} = V_{cilindro\ novo}$. E a demonstração está concluída.

Questão 13

Do ponto de vista alimentício, o **Ovo** é um alimento de origem animal, podendo pertencer a diversas espécies, incluindo aves, répteis, anfíbios e peixes. São consumidos pelos humanos ao longo de milhares de anos. Sabendo que este tem um formato ovoide, com altura de 5,4 cm e diâmetro 4 cm, calcule seu volume.



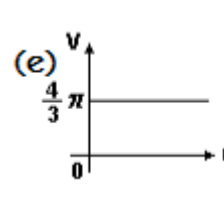
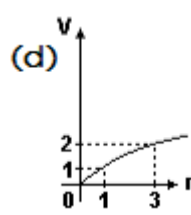
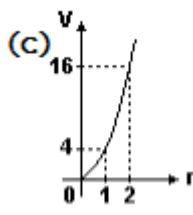
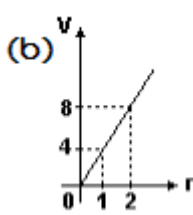
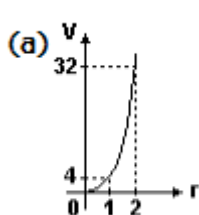
Solução

O volume do ovo, cujas dimensões são 2 cm, 2 cm e 5,4 cm será dado por

$$V_{ovo} = \frac{4\pi abc}{3} \Rightarrow V_{ovo} = \frac{4\pi \cdot 2^2 \cdot 5,4}{3} \Rightarrow V_{ovo} = \frac{86,4\pi}{3} \Rightarrow V_{ovo} = \frac{144\pi}{5} \text{ cm}^3.$$

Questão 14 - UFAL 2000 (Universidade Federal de Alagoas)

Dos gráficos abaixo, aquele que mais se aproxima do gráfico do volume de uma esfera em função de seu raio é



Solução

O volume de uma esfera é dado por $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$. Temos então a função $f(x) = \frac{4\pi}{3} x^3$.

Segue que esta é uma equação do 3º grau, e seu gráfico só pode ser o das alternativas (a) ou (c). Aproximando π para 3, veja que $f(1) = 4 \cdot 1^3 \Rightarrow f(1) = 4$ e $f(2) = 4 \cdot 2^3 \Rightarrow f(2) = 32$. Tais dados estão corretamente indicados no gráfico da alternativa (a).

Questão 15 - KSF 2015 (Kangourou Sans Frontières)

Um copo tem a forma de um cone truncado, conforme figura. Pauline quer colar um plástico colorido ao redor do copo, do lado de fora. Como ela deve cortar o plástico para colar perfeitamente na lateral do copo, sem enrugar?



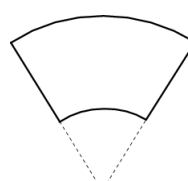
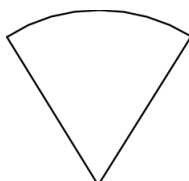
(a) retângulo

(b) trapezoide

(c) setor circular

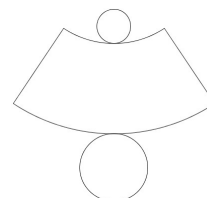
(d) tira curva de lados paralelos

(e) parte de setor circular



Solução

A planificação de um tronco de cone é mostrada ao lado. Para que Pauline possa colar o plástico sem enrugá-lo, este deve ter um formato equivalente à da lateral do copo, ou seja, com forma de parte de um setor circular. Logo, a resposta é a alternativa (e).



Questão 16

Tem-se dois cones, sendo o cone A de raio de base 3 e altura 5 e o cone B de raio da base 5 e altura 3. O valor de $V_A \cdot V_B \cdot \pi^{-2}$ é

(a) 350

(b) 375

(c) 400

(d) 450

(e) 510

Solução

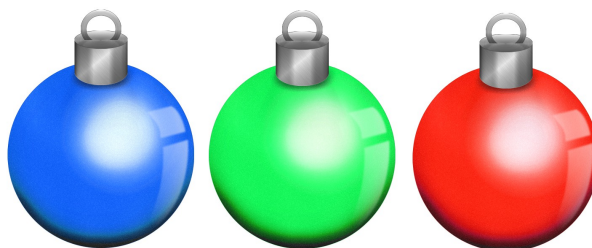
Temos que $V_A = \frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 5}{3} \Rightarrow V_A = 15\pi$ e $V_B = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 3}{3} \Rightarrow V_B = 25\pi$. Portanto,
 $V_A \cdot V_B \cdot \pi^{-2} = 15\pi \cdot 25\pi \cdot \pi^{-2} = 375$. Alternativa (b).

Questão 17

Papai Noel quer comprar bolinhas de Natal para enfeitar a árvore da fábrica de brinquedos do Polo Norte. Então, ele resolveu encomendar um pacote de dimensões quadradas com 45 cm de lado. Cada uma das bolinhas compradas tem diâmetro de 5 cm. Desconsiderando os espaços vazios do pacote, determine a quantidade de bolinhas de Natal compradas pelo Papai Noel.



Use $\pi = 3!$
Ho ho ho!



Solução

O volume do pacote será $V_{\text{pacote}} = 45^3 \Rightarrow V_{\text{pacote}} = 91125 \text{ cm}^3$. Por outro lado, cada bolinha de Natal tem volume de $V_{\text{bolinha de Natal}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2,5^3}{3} \Rightarrow V_{\text{bolinha de Natal}} = 62,5 \text{ cm}^3$. Assim, Papai Noel comprou um total de $\frac{91125}{62,5} \Rightarrow 1458$ bolinhas de Natal.

Questão 18 - PUCSP 2002 (Pontifícia Universidade Católica - SP)

A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.



Suponha que cada esfera tem 10,5cm de diâmetro e que o bastão tem 50cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4cm. Se a densidade do ferro é $7,8\text{g/cm}^3$, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar? (Use $\pi = \frac{22}{7}$)

- (a) 18 (b) 16 (c) 15 (d) 12 (e) 10

Solução

O volume de cada esfera é $V_{\text{Esfera}} = \frac{4 \cdot (\frac{22}{7}) \cdot 5,25^3}{3} \Rightarrow V_{\text{Esfera}} = \frac{12733,875}{21} \Rightarrow V_{\text{Esfera}} = \frac{4851}{8}$.

O volume do bastão é $V_{\text{Bastão}} = (\frac{22}{7}) \cdot 0,7^2 \cdot 50 \Rightarrow V_{\text{Bastão}} = \frac{539}{7} \Rightarrow V_{\text{Bastão}} = 77$.

Então, o volume do haltere $V_{\text{Haltere}} = 2V_{\text{Esfera}} + V_{\text{Bastão}} \Rightarrow V_{\text{Haltere}} = 2(\frac{4851}{8}) + 77 \Rightarrow V_{\text{Haltere}} = \frac{5159}{4}$.

Lembrando que $D = \frac{m}{V}$, a massa m do haltere é $m = \frac{5159}{4} \cdot 7,8 \Rightarrow m = 10060,05 \text{ g} \Rightarrow m \simeq 10 \text{ kg}$.

A alternativa (e) fornece a resposta correta.

Questão 19

Uma ampulheta é formada por dois cones circulares retos idênticos, tendo cada um deles 6 cm de diâmetro na base e 10 cm de altura. Um deles está totalmente cheio de areia e escoar para outro cone à razão de $0,6 \text{ cm}^3$ por segundo. Qual o tempo necessário para escoar totalmente a areia de um cone para outro? (Use $\pi = 3,14$ para efeito de cálculo.)



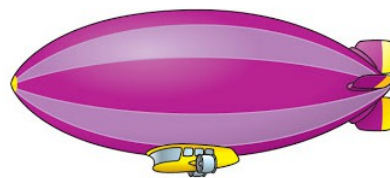
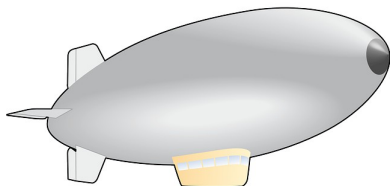
Solução

O volume total da ampulheta será equivalente à soma dos volumes dos dois cones. Assim,
 $V_{\text{Ampulheta}} = 2V_{\text{Cone}}$. Utilizando os dados do enunciado, temos que

$V_{\text{Ampulheta}} = 2\left(\frac{\pi \cdot 3^2 \cdot 10}{3}\right) \Rightarrow V_{\text{Ampulheta}} = 90\pi \Rightarrow V_{\text{Ampulheta}} = 282,6$. Então, como a vazão desta ampulheta é de $0,6 \text{ cm}^3$ por segundo, o tempo t necessário para escoar toda areia de um cone para o outro será $t = \frac{282,6}{0,6} \Rightarrow t = 471 \text{ s}$. O tempo necessário é de 471 segundos ou 7 minutos e 51 segundos.

Questão 20

O Zeppelin é um tipo de aeróstato rígido, mais especificamente um dirigível, cujo nome é uma homenagem ao conde alemão Ferdinand Von Zeppelin, que foi pioneiro no desenvolvimento de dirigíveis rígidos no início do século XX.



As primeiras ideias de Zeppelin foram formuladas em 1874 e desenvolvidas em detalhes em 1893, sendo patenteadas na Alemanha em 1895 e nos Estados Unidos em 1899. Considerando que este dirigível tenha um formato ovoide e dimensões de 236,6 metros de comprimento e raio de 15 metros, determine seu volume.

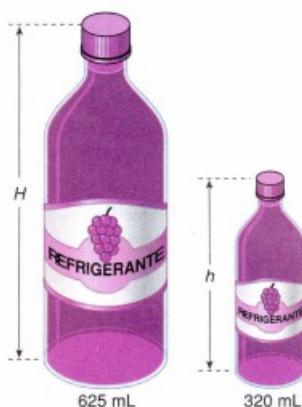
Solução

Por ser uma ovoide, o volume do Zeppelin será dado por

$$V_{\text{Zeppelin}} = \frac{4\pi abc}{3} \Rightarrow V_{\text{Zeppelin}} = \frac{4\pi \cdot 15^2 \cdot 236,6}{3} \Rightarrow V_{\text{Zeppelin}} = \frac{212940\pi}{3} \Rightarrow V_{\text{Zeppelin}} = 70980\pi \text{ m}^3.$$

Questão 21 - UFF 1997 (Universidade Federal Fluminense)

Um certo tipo de refrigerante é comercializado em duas embalagens geometricamente semelhantes. Uma contém 625 mL do produto, e a outra, 320 mL. Qual é a razão entre as alturas dessas embalagens?



Solução

Como as embalagens são geometricamente semelhantes, podemos perceber que existe uma razão de semelhança entre as alturas das embalagens e seus respectivos volumes. Dessa forma,

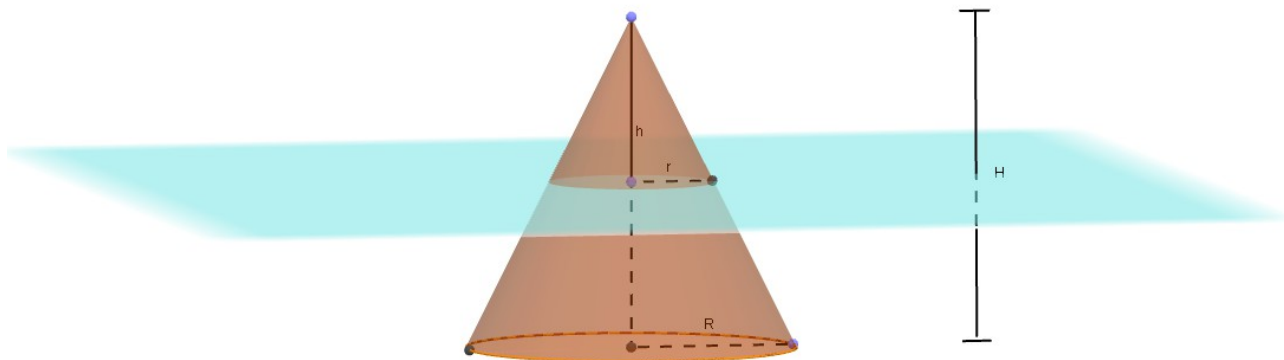
temos $\frac{h}{H} = \sqrt[3]{\frac{320}{625}} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{4}{5} = 0,8.$

2.2 Nível Médio

Questão 1 – UNESP 1990 (Universidade Estadual Paulista)

Um cone reto tem raio da base R e altura H . Secciona-se esse cone por um plano paralelo à base e distante h do vértice, obtendo-se um cone menor e um tronco de cone, ambos de mesmo volume. Determine a razão $\frac{h}{H}$.

Solução



Ao realizarmos a secção do cone, considere r o raio da base do cone menor obtido. Por semelhança, é óbvio que $\frac{H}{R} = \frac{h}{r} \Rightarrow r = \frac{Rh}{H}$. Então, temos

$$\begin{aligned} V_{\text{cone menor}} &= V_{\text{tronco de cone}} \Rightarrow \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2) \Rightarrow \frac{\pi \cdot \left(\frac{Rh}{H}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (H-h)}{3} \cdot \left(\left(\frac{Rh}{H}\right)^2 + R\left(\frac{Rh}{H}\right) + R^2\right) \Rightarrow \\ \left(\frac{Rh}{H}\right)^2 \cdot h &= (H-h) \cdot \left(\left(\frac{Rh}{H}\right)^2 + R\left(\frac{Rh}{H}\right) + R^2\right) \Rightarrow R^2 h \left(\frac{h}{H}\right)^2 = R^2 h \left(\frac{h}{H}\right) + R^2 h + R^2 H - R^2 h \left(\frac{h}{H}\right)^2 - R^2 h \left(\frac{h}{H}\right) - R^2 h \Rightarrow \\ \Rightarrow h \left(\frac{h}{H}\right)^2 &= H - h \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow 2h \left(\frac{h}{H}\right)^2 = H \Rightarrow \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{H}{2h} \Rightarrow 2h^3 = H^3 \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{H^3}{2}} \Rightarrow h = \frac{H \sqrt[3]{4}}{2}. \end{aligned}$$

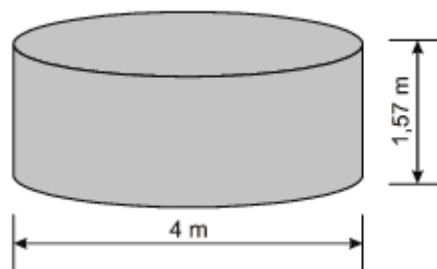
Assim, $\frac{h}{H} = \frac{\frac{H \sqrt[3]{4}}{2}}{H} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Podemos fazer também $\left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{H}{2h} \Rightarrow \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{H}\right)^{-1} \Rightarrow \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{h}{H}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Questão 2 – ACAFÉ 2012 (Associação Catarinense de Fundações Educacionais)

Uma piscina cilíndrica, cujas dimensões são indicadas na figura ao lado, e cheia por uma mangueira a taxa de 1570 L por hora.

I. A função $h(t)$, em que h indica a altura da água alcançada pela piscina em metros e t indica o tempo em horas, é uma função do segundo grau.



II. O enchimento da piscina será interrompido quando a piscina estiver completamente cheia; neste caso, pode-se dizer que a função $h(t)$ tem como domínio o conjunto $D = \{t \in \mathbb{R} | 0 \leq t \leq 12,56\}$.

III. O tempo total de enchimento dessa piscina será de 12 horas e 56 minutos.

São corretas as asserções

- (a) I (b) II (c) III (d) I e II (e) II e III

Solução

Aproximando 3,14 para π , e percebendo que $1,57 = \frac{\pi}{2}$, temos que o volume total da piscina será $V_{Piscina} = \pi \cdot 2^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow V_{Piscina} = 2\pi^2 m^3$. Sabe-se que $1570 \text{ L} = 1,57 m^3 = \frac{\pi}{2} m^3$. Feitas essas observações, vamos analisar cada afirmação:

I. Falsa. Se a mangueira tem vazão de $\frac{\pi}{2} m^3$ em 1 hora, então teremos $\frac{\pi}{2} = \pi \cdot 2^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{1}{8}$.

Assim, em t horas a altura da água será $h(t)$, ou seja, $h(t) = \frac{t}{8}$. Esta é uma função do 1º grau.

II. Verdadeira. A piscina estará totalmente cheia para $h(t) = \frac{\pi}{2}$, e então teremos

$\frac{\pi}{2} = \frac{t}{8} \Rightarrow t = 4\pi$, aproximadamente igual a 12,56 horas, o que corresponde ao intervalo fornecido para o domínio da função.

III. Falsa. Do item anterior, vemos que o tempo necessário para encher a piscina é de 12,56 horas, que equivalem a 12 horas, 33 minutos e 36 segundos.

Questão 3 – UNESP 2014 (Universidade Estadual Paulista)

Prato da culinária japonesa, o temaki é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.



Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% do volume do seu recheio, que a densidade do salmão é de $0,35 \text{ g/cm}^3$, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

- (a) 46,8 (b) 58,5 (c) 54 (d) 50,4 (e) 52

Solução

O temaki da questão tem um formato e dimensões como mostradas no modelo matemático ao lado.

Sendo R o raio da base do cone e h a altura, temos

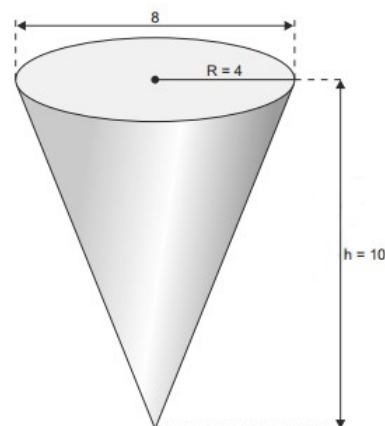
$$V_{\text{Temaki}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{Temaki}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{Temaki}} = \frac{3 \cdot 4^2 \cdot 10}{3} \Rightarrow V_{\text{Temaki}} = 160.$$

Como o volume de salmão é 90% do volume de temaki, temos que

$$V_{\text{Salmão}} = \frac{90}{100} \cdot V_{\text{Temaki}} \Rightarrow V_{\text{Salmão}} = \frac{90}{100} \cdot 160 \Rightarrow V_{\text{Salmão}} = 144.$$

Como a densidade do salmão é $0,35 \text{ g/cm}^3$ a massa m de salmão é

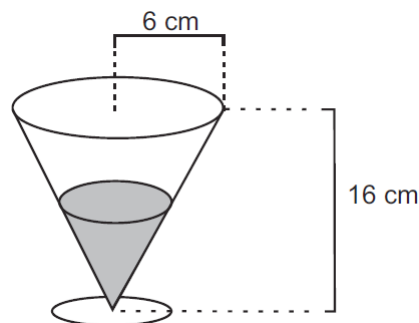
$$m = 144 \cdot 0,35 \Rightarrow m = 50,4 \text{ g} \quad \text{A resposta é a alternativa (d).}$$



Questão 4 – UME SP 2008 (Universidade Metodista de São Paulo)

Um copo com a forma de um cone, com 6 cm de raio da base e 16 cm de altura, como o da figura abaixo, estava totalmente cheio de suco. Júlia tomou 75% desse suco. O volume de suco que restou no copo é, aproximadamente,

- (a) $36\pi \text{ cm}^3$
- (b) $48\pi \text{ cm}^3$
- (c) $56\pi \text{ cm}^3$
- (d) $72\pi \text{ cm}^3$
- (e) $144\pi \text{ cm}^3$



Solução

O volume do copo será, em cm^3 , $V_{\text{copo}} = \frac{\pi \cdot 6^2 \cdot 16}{3} \Rightarrow V_{\text{copo}} = 192\pi$. Bebendo 75% do suco, equivalente a $\frac{3}{4}$ do copo, sobrá $\frac{1}{4}$ de seu volume e então teremos que

$$V_{\text{suco restante}} = \frac{V_{\text{copo}}}{4} \Rightarrow V_{\text{suco restante}} = \frac{192\pi}{4} \Rightarrow V_{\text{suco restante}} = 48\pi.$$

A resposta é a alternativa (b).

Questão 5 – OBM 2004 (Olimpíada Brasileira de Matemática)

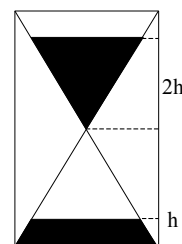
Uma ampulheta é formada por dois cones idênticos. Inicialmente, o cone superior está cheio de areia e o cone inferior está vazio. A areia flui do cone superior para inferior com vazão constante. O cone superior se esvazia em exatamente uma hora e meia. Quanto tempo demora até que a altura da areia no cone inferior seja metade da altura da areia no cone superior?

- (a) 30min
- (b) 10h
- (c) 1h03min20s
- (d) 1h10min12s
- (e) 1h14min30s

Solução

Quando a altura da areia no cone inferior é a metade da altura da areia no cone superior, passaram para o cone inferior $1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27}$ do volume total de areia.

Portanto, demora $\frac{19}{27} \cdot 1\text{h}30\text{ min} = \frac{19}{27} \cdot 5400\text{s} = 3800\text{s} = 1\text{h}03\text{ min } 20\text{s}$.



Questão 6

Após participar do filme Frozen, Olaf resolveu tirar férias indo à praia. Para lhe fazer companhia, resolveu convidar seus amigos Olavo e Olacyr.



Olavo



Olaf



Olacyr

Eles combinaram de se encontrar em Arendelle para partirem juntos. Durante a viagem, Olaf percebeu que Olavo, Olacyr têm a mesma altura de 1,2m, e a altura de suas cabeças é metade da altura de seus corpos, sendo que estas têm uma forma esférica. Já Olavo e Olacyr viram que Olaf tem uma cabeça de forma ovoide cuja altura corresponde a terça parte de sua altura total e o diâmetro é metade da altura da cabeça e seu corpo é formado por duas formas esféricas, sendo que uma tem o triplo da altura da outra. Sabe-se que os três tem alturas iguais e que a densidade da neve é de 90 kg/m^3 .

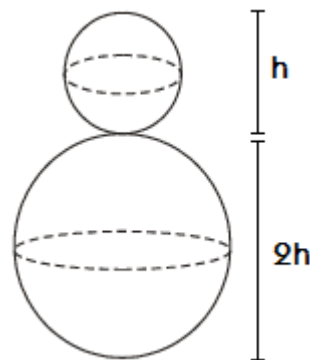
Ao chegarem, eles combinam de dividir um apartamento no 28º andar de um prédio. O único jeito para chegar lá é utilizar um pequeno elevador cuja capacidade máxima é de 60 kg. É possível que Olaf, Olavo e Olacyr entrem juntos no elevador? Use $\pi = 3$ e justifique sua resposta.

Solução

Considere o esboço de Olavo e Olacyr feito ao lado. Veja que $3h = 1,2 \Rightarrow h = 0,4\text{ m}$. Para calcular a massa de cada um deles, devemos calcular seus volumes. Assim, temos dessa forma:

$$\begin{aligned} V_{\text{Amigos de Olaf}} &= V_{\text{cabeça}} + V_{\text{corpo}} \Rightarrow V_{\text{Amigos de Olaf}} = \frac{4 \cdot \pi \left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} + \frac{4 \cdot \pi h^3}{3} \Rightarrow \\ V_{\text{Amigos de Olaf}} &= \frac{4 \cdot 3 \cdot 0,2^3}{3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 0,4^3}{3} \Rightarrow V_{\text{Amigos de Olaf}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 0,2^3}{3} \\ &+ \frac{4 \cdot 3 \cdot 0,4^3}{3} \Rightarrow V_{\text{Amigos de Olaf}} = 0,032 + 0,256 \Rightarrow V_{\text{Amigos de Olaf}} = 0,288\text{ m}^3. \end{aligned}$$

Como a densidade da neve é de 90 kg/m^3 , temos uma massa de $m = 0,288 \cdot 90 \Rightarrow m = 25,92\text{ kg}$.



Agora, vamos calcular o volume de Olaf. Ao lado temos um esboço. Perceba que $2h + h + 3h = 1,2 \Rightarrow h = 0,2 \text{ m}$. De forma análoga ao cálculo anterior, temos que:

$$V_{\text{Olaf}} = V_{\text{cabeça}} + V_{\text{corpo}_1} + V_{\text{corpo}_2} \Rightarrow$$

$$V_{\text{Olaf}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 2h \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2}{3} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3}{3} + \frac{4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{3h}{2}\right)^3}{3} \Rightarrow$$

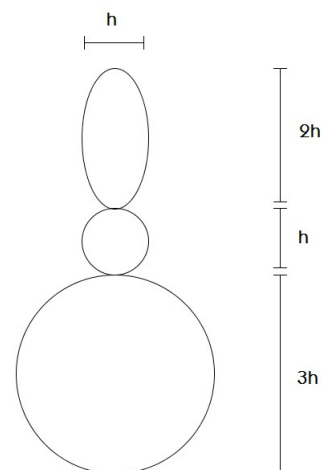
$$V_{\text{Olaf}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 0,4 \cdot (0,1)^2}{3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot (0,1)^3}{3} + \frac{4 \cdot 3 \cdot (0,3)^3}{3} \Rightarrow$$

$$V_{\text{Olaf}} = 0,016 + 0,004 + 0,108 \Rightarrow V_{\text{Olaf}} = 0,128 \text{ m}^3.$$

Temos que a massa de Olaf é $90 \times 0,128 = 11,52 \text{ kg}$.

A massa dos três juntos é $2 \cdot 25,92 + 11,52 = 63,36 \text{ kg}$.

Como o elevador suporta no máximo 60 kg, eles não conseguirão entrar juntos no elevador.



Questão 7 – ORMSE 2012 (Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina)

O dobro da medida do raio da esfera A é equivalente ao volume da esfera B. A razão entre os volumes das duas esferas é $216\pi^3$. O raio da esfera B mede:

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Solução

Seja r o raio da esfera A. O volume da esfera B é $2r$. Sabemos que o volume da esfera é calculado

pela seguinte fórmula: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$. Logo, temos que:

$$V_A = \frac{4\pi r_A^3}{3} \qquad V_B = 2r_A$$

Pelo enunciado, sabemos que a razão entre os volumes das duas esferas é $216\pi^3$.

Podemos afirmar que $\frac{V_A}{V_B} = 216\pi^3 \rightarrow V_A = 216\pi^3 V_B \rightarrow V_A = 216\pi^3 (2r_A) \rightarrow V_A = 432\pi^3 r_A$. E

$$\frac{4\pi r_A^3}{3} = 432\pi^3 r_A \rightarrow 4\pi r_A^3 = 1296\pi^3 r_A \rightarrow 4\pi r_A^2 = 1296\pi^3 \rightarrow r_A^2 = 324\pi^2 \rightarrow r_A = 18\pi$$
 Substituindo:

$$V_B = 2(18\pi) \rightarrow V_B = 36\pi \rightarrow 36\pi = \frac{4\pi r_B^3}{3} \rightarrow 108\pi = 4\pi r_B^3 \rightarrow r_B^3 = 27 \rightarrow r_B = 3$$

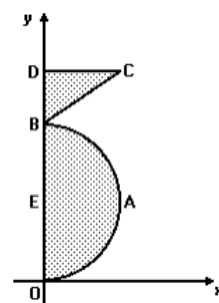
O raio da esfera B é 3. Alternativa (c)

Questão 8 – UFMG 1996 (Universidade Federal do Mato Grosso)

A região sombreada na figura a seguir sofre uma rotação completa em torno do eixo y. Sejam os pontos $O=(0,0)$; $A=(1,1)$; $B=(0,2)$; $C=(1,3)$; $D=(0,3)$ e $E=(0,1)$. OAB é uma semicircunferência com centro em E.

Sendo V a medida do volume do sólido de revolução gerado, calcule o

valor de $\frac{36V}{5\pi}$.



Solução

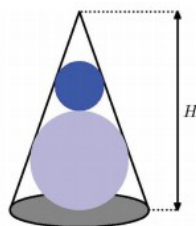
O volume do sólido formado será a soma dos volumes da esfera e do cone formados. Assim,

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{esfera}} + V_{\text{cone}} \Rightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} + \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 1}{3} \Rightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{4\pi + \pi}{3} \Rightarrow V_{\text{sólido}} = \frac{5\pi}{3}.$$

Assim, temos que $\frac{36V}{5\pi} = \frac{36(\frac{5\pi}{3})}{5\pi} = 12.$

Questão 9 – UFRJ 2008 (Universidade Federal do Rio de Janeiro)

Um cone circular reto de altura H circunscreve duas esferas tangentes, como mostra a figura abaixo. A esfera menor tem raio de 5 cm e a esfera maior tem raio equivalente ao diâmetro da esfera menor.

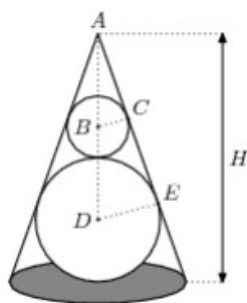


Qual é o valor de H ?

- (a) 25 cm (b) 30 cm (c) 35 cm (d) 40 cm (e) 45 cm

Solução

Sejam R e r respectivamente os raios das esferas maior e menor. Então podemos escrever $H = 2R + 2r + h$, sendo h a distância entre o vértice do cone e a esfera menor. Como o diâmetro da esfera menor é o raio da esfera maior, e a esfera menor tem raio de 5 cm, podemos dizer que $r = 5$ e $R = 2 \times 5 = 10$.



Para determinar h , consideremos os triângulos retângulos ABC e ADE na figura acima. Por semelhança, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{h+5}{h+20} = \frac{5}{10} \Rightarrow 10(h+5) = 5(h+20) \Rightarrow 10h+50 = 5h+100 \Rightarrow 5h = 50 \Rightarrow h = 10.$$

Assim, $h = 10$ e $H = 2(10) + 2(5) + 10 = 40$.

Alternativa (d).

Questão 10 – OBM 1997 (Olimpíada Brasileira de Matemática)

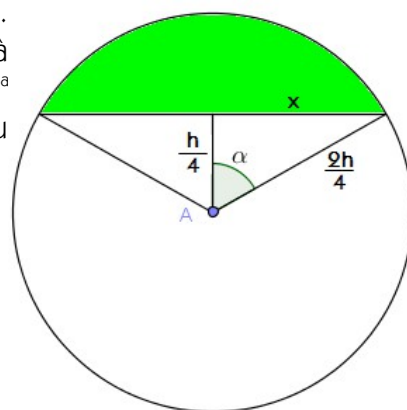
O reservatório de um caminhão-tanque tem a forma de um cilindro de revolução com eixo horizontal e está cheio até $\frac{3}{4}$ da altura. A fração da capacidade total do reservatório que está ocupada é de aproximadamente:

- (a) 80% (b) 75% (c) 68% (d) 60% (e) 56%

Solução

Considere o cilindro com eixo vertical. Desse modo, sua altura irá se tornar o raio e vice-versa. Daí, sendo r o raio da base desse cilindro e h sua altura, vamos calcular o volume do reservatório cheio e o volume total, lembrando que podemos escrever que $V_{cilindro} = A_{base} \cdot h$.

Primeiramente, considere o esboço ao lado da base do cilindro. Veja que a área da base (indicada em branco) será equivalente à área total do círculo subtraído da área do setor circular de ângulo 2° e adicionado da área dos dois triângulos retângulos formados, ou seja, $A_{branco} = A_{total} - A_{setor} + 2A_{triângulo}$.



$$\text{Temos que } \cos \alpha = \frac{\frac{h}{4}}{\frac{2h}{4}} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

$$\text{Então } A_{branco} = \pi \cdot \left(\frac{2h}{4}\right)^2 - \frac{\pi \cdot \left(\frac{2h}{4}\right)^2 \cdot 60}{360} + 2 \cdot \left(\frac{\frac{h}{4}}{2} \cdot \left(\frac{2h}{4}\right) \cdot \sin 60^\circ\right) \Rightarrow$$

$$A_{branco} = \left(\frac{4\pi h^2}{16}\right) - \left(\frac{4\pi h^2}{96}\right) + \left(\frac{2\sqrt{3}h^2}{32}\right) \Rightarrow A_{branco} = \frac{20\pi h^2 + 6\sqrt{3}h^2}{96} \Rightarrow A_{branco} = \frac{10\pi h^2 + 3\sqrt{3}}{48} h^2.$$

A razão entre os volumes será então

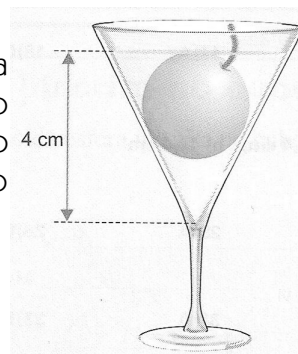
$$\frac{V_{cheio}}{V_{total}} = \frac{A_{branco} \cdot h}{A_{total} \cdot h} \Rightarrow \frac{V_{cheio}}{V_{total}} = \frac{A_{branco}}{A_{total}} \Rightarrow \frac{V_{cheio}}{V_{total}} = \frac{\frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{48} h^2}{\left(\frac{4\pi h^2}{16}\right)} \Rightarrow \frac{V_{cheio}}{V_{total}} = \frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12\pi} = \frac{V_{cheio}}{V_{total}} = \frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12\pi}$$

$$\frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12\pi} \Rightarrow \frac{V_{cheio}}{V_{total}} = \frac{160\pi + 48\sqrt{3}}{192\pi} \Rightarrow \frac{V_{cheio}}{V_{total}} = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \Rightarrow \frac{V_{cheio}}{V_{total}} \simeq 0,833.$$

A resposta é 80%, alternativa (a).

Questão 11 – FGV 2012 (Fundação Getúlio Vargas)

Um cálice com a forma de um cone mantém $V \text{ cm}^3$ de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro 2cm, é colocada dentro do cálice, supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice, e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V .



Solução

O volume da bebida contida no cálice é igual ao volume do cálice até a altura de 4 cm menos o volume da cereja. O volume da cereja corresponde ao volume de uma esfera de raio $r = 1$ cm, ou seja,

$$V_{\text{cereja}} = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V_{\text{cereja}} = \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow V_{\text{cereja}} = \frac{4\pi}{3}.$$

Vamos determinar o volume do cone. Para tal, devemos obter o raio da base do cone, que será denotado aqui por R . É possível identificar dois triângulos semelhantes na figura, conforme esboço a seguir. Nesse esboço temos: $R = \overline{CD}$, $\overline{AD} = 4$, $\overline{DE} = \overline{BE} = 1$, $\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{DE} = 3$.

Como o triângulo AEB é retângulo em B , utilizamos o Teorema de Pitágoras para obter:

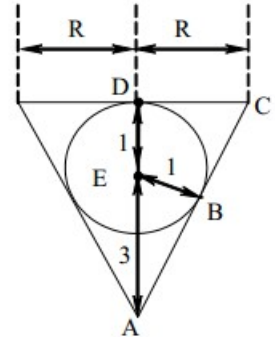
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{BE}^2} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{9 - 1} \Rightarrow \overline{AB} = 2\sqrt{2}.$$

Por semelhança dos triângulos ABE e ADC , temos:

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{R}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \sqrt{2}.$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 4}{3} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{8\pi}{3}.$$

$$V_{\text{bebida}} = V_{\text{cone}} - V_{\text{cereja}} \Rightarrow V_{\text{bebida}} = \frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} \Rightarrow V_{\text{bebida}} = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3.$$



Questão 12

A azeitona é o fruto da oliveira (*Olea europaea*), também chamado de verde-oliva. É de grande importância agrícola na região mediterrânea como fonte de óleo de oliva. Sendo a , b e c as dimensões da azeitona, determine o valor de abc , sabendo que num pote cilíndrico de raio de base 3,5 cm e altura 24 cm cabem 147 azeitonas. Desconsidere possíveis espaços vazios no pote.

- (a) 1 (b) 1,5 (c) 2 (d) 2,5 (e) 3



Solução

$$\text{O volume do pote será } V_{\text{pote}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{pote}} = \pi \cdot 3,5^2 \cdot 24 \Rightarrow V_{\text{pote}} = 294\pi.$$

Como cabem 147 azeitonas no pote, temos que o volume de cada azeitona será

$$\frac{294\pi}{147} = 2\pi \text{ cm}^3. \text{ Daí, como a azeitona tem uma forma aproximadamente ovoide, temos}$$

$$V_{\text{azeitona}} = \frac{4\pi abc}{3} \Rightarrow 2\pi = \frac{4\pi abc}{3} \Rightarrow abc = \frac{6\pi}{4\pi} \Rightarrow abc = 1,5. \text{ Alternativa (b).}$$

Questão 13 – JTA 2015 (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, sem haver transbordamento, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

- (a) $\sqrt[3]{2} - h$ (b) $\sqrt[3]{2} - 1$ (c) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$ (d) h (e) $2h$

Solução

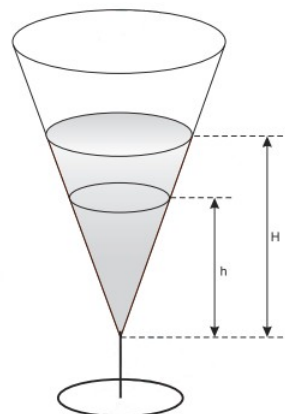
Observe a figura ao lado. Sendo H a distância da superfície do líquido até o vértice após adicionar-se o volume idêntico de líquido na taça, temos por semelhança:

$$\frac{V_{\text{inicial}}}{V_{\text{final}}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{inicial}}}{2V_{\text{inicial}}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow H = h\sqrt[3]{2}.$$

Assim, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

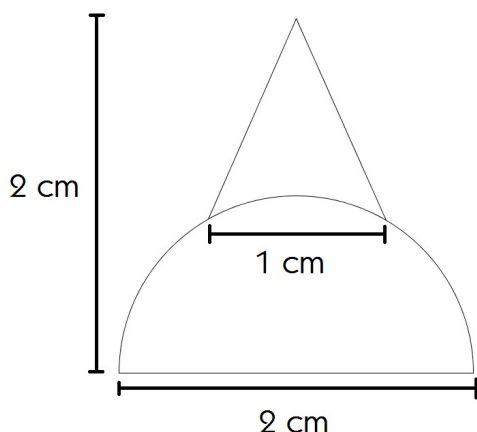
$$H - h = h\sqrt[3]{2} - h = (\sqrt[3]{2} - 1)h.$$

A resposta é a alternativa (c).



Questão 14

Um tipo de chocolate muito conhecido está mostrado ao lado. Cada um deles possui massa de 4,5g. Para calcular o volume médio de uma unidade, Gabriel fez um esboço de um deles, decompondo-o em um cone e uma semiesfera, cujas dimensões estão indicadas.



Usando $\pi = 3$ sua vida ficará mais doce!



Determine a densidade do chocolate utilizado em g/cm^3 .

- (a) 1,2 (b) 1,5 (c) 2 (d) 3 (e) 4,5

Solução

Olhando a figura, percebe-se que a altura do cone é de $2 - 1 = 1$ cm. O volume total do chocolate será

$$V_{\text{chocolate}} = V_{\text{cone}} + V_{\text{semiesfera}} \Rightarrow V_{\text{chocolate}} = \frac{\pi \cdot 0,5^2 \cdot 1}{3} + \frac{4\pi \cdot 1^3}{2} \Rightarrow V_{\text{chocolate}} = \frac{3 \cdot 0,25}{3} + \frac{4 \cdot 3}{2} \Rightarrow V_{\text{chocolate}} = 0,25 + 2 \Rightarrow V_{\text{chocolate}} = 2,25 \text{ cm}^3.$$

$$\text{A densidade do chocolate é } D = \frac{M_{\text{chocolate}}}{V_{\text{chocolate}}} \Rightarrow D = \frac{4,5}{2,25} \Rightarrow D = \frac{9}{2} \Rightarrow D = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{9} \Rightarrow D = \frac{4}{2} \Rightarrow D = 2 \text{ g/cm}^3.$$

Questão 15 – PUQSP 2002 (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo) – Adaptado

Normalmente, quando andamos sob chuva, as gotas que caem não nos machucam. Isso ocorre porque as gotas d'água não estão em queda livre, mas sujeitas a um movimento no qual a resistência do ar não pode ser desconsiderada.

A resistência do ar é uma força cujo sentido é sempre contrário ao sentido do movimento do objeto e seu valor é tanto maior quanto maior for a velocidade do corpo em movimento. Para uma gota em queda, a velocidade aumenta até um valor máximo denominado velocidade limite. Como as gotas têm, em geral, pequena massa e baixa velocidade limite - em média 18km/h - o impacto, normalmente, não nos causa sensação dolorosa. O texto abaixo se relaciona com o descrito. Leia-o com atenção e responda ao que se solicita.

CORTANDO O AR

Vencer a resistência do ar ao deslocamento do carro é função da aerodinâmica. A forma ideal de qualquer modelo seria a criada pela natureza na gota d'água", explica o chefe de Design da Volkswagendo Brasil, Luiz Alberto Veiga (que preparou para o jornal "O Estado de São Paulo" os desenhos do quadro abaixo).

EM BUSCA DO MODELO IDEAL



Modelos hatch têm mais problemas de aerodinâmica, porque criam áreas de maior turbulência atrás – o efeito "desentupidor de pia", que dificulta o avanço.

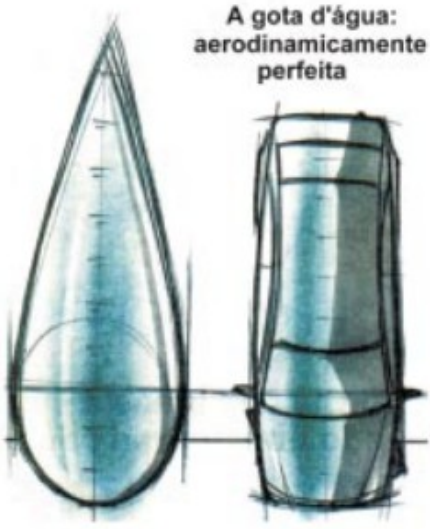


O desenho dos sedãs e cupês permite que o ar flua com mais facilidade ao longo da carroceria, reduzindo a turbulência e, portanto, o repuxo.



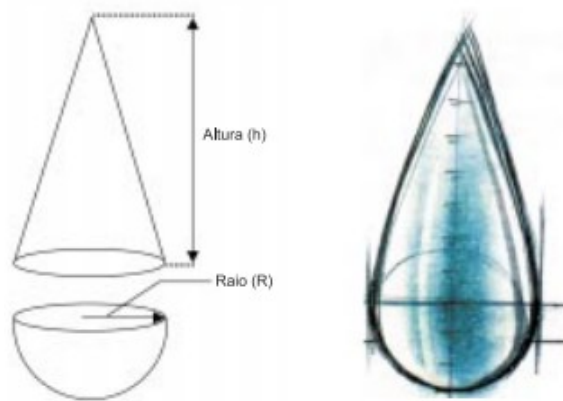
A forma ideal de carro seria a de uma gota cortada longitudinalmente: isso não provocaria turbulência atrás, facilitando o deslocamento.

A gota d'água: aerodinamicamente perfeita



O Estado de S. Paulo – maio/2000

Numa boa aproximação, uma gota d'água pode ser considerada como o resultado da união de dois sólidos: uma semi-esfera e um cone (veja a figura seguinte). Calcule a relação entre a altura (h) do cone e o raio (R) da semi-esfera, considerando que seus volumes são iguais.

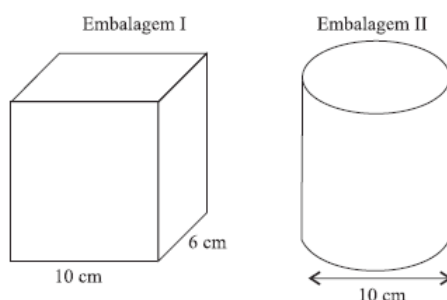


Solução

Como os volumes são iguais, temos $V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cone}} \Rightarrow \frac{2\pi \cdot R^3}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \Rightarrow \frac{h}{R} = 2$.

Questão 16 – UFABO 2006 (Universidade Federal do Grande ABC)

O cereal da marca Saúde é comercializado em dois tipos de embalagem, pelo mesmo preço. A embalagem I tem a forma de um paralelepípedo reto retângulo e a embalagem II tem forma de um cilindro reto. Ambas têm a mesma altura.



Supondo que as duas embalagens estejam completamente preenchidas pelo cereal, pode-se afirmar que quem compra Saúde na embalagem II em vez da embalagem I compra, aproximadamente,

- (a) 10% a mais de cereal.
- (b) 30% a mais de cereal.
- (c) 45% a mais de cereal.
- (d) 8% a menos de cereal.
- (e) 25% a menos de cereal.

Solução

Seja h a altura das embalagens. Aproximaremos π para 3,14. Usando a embalagem I, o volume de cereal comprado será

$$V_{\text{embalagem I}} = 10 \cdot 6 \cdot h \Rightarrow V_{\text{embalagem I}} = 60h.$$

Já usando a embalagem II, o volume de cereal comprado será

$$V_{\text{embalagem II}} = \pi \cdot 5^2 \cdot h \Rightarrow V_{\text{embalagem II}} = 25\pi h.$$

Então, comprando o produto utilizando a embalagem II ao invés da embalagem I se compra

$$100\left(\frac{25\pi h}{60h}\right) - 100 = 100\left(\frac{25 \cdot 3,14 h}{60h}\right) - 100 = 130,83 - 100 = 30,83 \simeq 30 \% \text{ a mais. Alternativa (b)}$$

Observação: Se em vez de usar $\pi = 3,14$ utilizássemos $\pi = 3$, obteríamos

$$100\left(\frac{25 \cdot 3 h}{60h}\right) - 100 = 125 - 100 = 25 \% \text{ a mais. Ou seja, temos uma variação de 5\% em relação ao}$$

resultado. Isso mostra como é importante utilizarmos o valor de π com a maior precisão possível, salvo quando indicado no enunciado.

Questão 17

O professor Paulo Saldiva pedala 6 km em 22 minutos de casa para o trabalho, todos os dias. Nunca foi atingido por um carro. Mesmo assim, é vítima diária do trânsito de São Paulo: a cada minuto sobre a bicicleta, seus pulmões são envenenados com 3,3 microgramas de poluição particulada – poeira, fumaça, fuligem, partículas de metal em suspensão, sulfatos, nitratos, carbono, compostos orgânicos e outras substâncias nocivas.

ESCOBAR, H. Sem Ar. *O Estado de São Paulo*. Ago. 2008.

Considere que seja possível armazenar toda a poluição particulada que o professor inala durante 1 ano, considerando apenas a ida de casa para o trabalho, num cilindro reto equilátero de densidade $0,01 \text{ g/cm}^3$. A altura desse cilindro será, em cm,

- (a) 0,75 (b) 1 (c) 1,5 (d) 1,75 (e) 2

Solução

O professor inala $3,3 \mu\text{g}$ por minuto. Logo, em 22 minutos ele inalará $72,6 \mu\text{g}$ por dia. Como um ano tem 365 dias, o total será de $26499 \mu\text{g} = 0,026499 \text{ g}$. O volume do cilindro será então

$$V = \frac{0,026499}{0,01} = 2,6499 \text{ cm}^3.$$

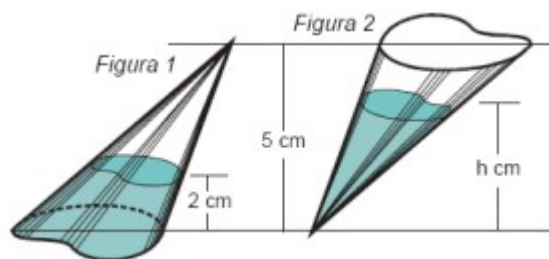
Como o cilindro é equilátero, segue que $V = 2\pi \cdot r^3 \Rightarrow 2,6499 = 2\pi r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{2,6499}{2\pi} \Rightarrow r \simeq 0,75 \text{ cm}$.

Alternativa (a).

2.3 Nível Difícil

Questão 1 - UFRJ 2005 (Universidade Federal do Rio de Janeiro)

Uma ampola de vidro tem o formato de um cone cuja altura mede 5 cm. Quando a ampola é posta sobre uma superfície horizontal, a altura do líquido em seu interior é de 2 cm (Figura 1). Determine a altura h do líquido quando a ampola é virada de cabeça para baixo (Figura 2).



Solução

Seja V_{cone} o volume total do cone, V_{vazio} o volume da parte vazia do cone e V_{liquido} o volume de líquido presente no cone. Observando a Figura 1, por semelhança, temos

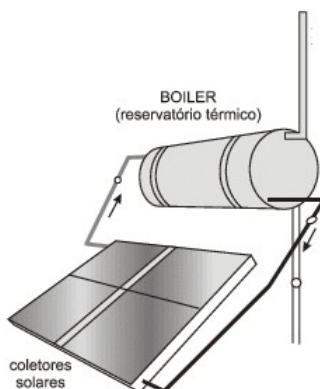
$$\frac{V_{\text{vazio}}}{V_{\text{cone}}} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \Rightarrow 27V_{\text{vazio}} = 125V_{\text{cone}} \Rightarrow 27V_{\text{cone}} = 125(V_{\text{cone}} - V_{\text{liquido}}) \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{125V_{\text{liquido}}}{98}. \quad (I)$$

Agora, a partir da Figura 2, temos $\frac{V_{\text{liquido}}}{V_{\text{cone}}} = \left(\frac{h}{5}\right)^3 \Rightarrow h^3 V_{\text{cone}} = 125V_{\text{liquido}} \Rightarrow h^3 = \frac{125V_{\text{liquido}}}{V_{\text{cone}}}. \quad (II)$

Substituindo (I) em (II), temos $h^3 = \frac{125V_{\text{liquido}}}{\frac{125V_{\text{liquido}}}{98}} \Rightarrow h^3 = 98 \Rightarrow h = \sqrt[3]{98}.$

Questão 2 - UFU 2011 (Universidade Federal de Uberlândia)

Ao assistir a uma reportagem na TV sobre o impacto do crescimento demográfico nos recursos hídricos, o Sr. José decidiu adotar medidas que auxiliam na preservação de recursos naturais. Ele construiu um reservatório para captação de água da chuva e também instalou um aquecedor solar em sua residência. O sistema de aquecimento solar é composto de coletores solares (placas) e um reservatório térmico chamado boiler, o qual tem o formato de um cilindro circular reto, como mostra figura abaixo.



Por sua vez, foi escolhido e construído um reservatório para a captação de água da chuva na forma de um prisma reto cuja base é um quadrado.

Sabe-se que:

I. o lado da base do prisma (que corresponde ao reservatório) mede 2 metros e o raio da base do cilindro (que corresponde boiler) mede $\frac{1}{2}$ metro;

II. a área lateral do prisma (reservatório) é igual ao dobro da área lateral do cilindro (boiler).

A partir das considerações acima, redija um texto que relacione o volume do reservatório e o volume do boiler. Utilizando-o estabeleça o valor da razão (volume do reservatório) / (volume do boiler).

Solução

De II, temos que $A_{lateral\ prisma} = 2A_{lateral\ cilindro}$.

De I, são dadas as dimensões das bases de ambos. Seja h a altura do prisma e H a altura do cilindro. Temos:

$$4(2h) = 2\left(2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot H\right) \Rightarrow 8h = 2\pi H \Rightarrow H = \frac{4h}{\pi}.$$

Assim, podemos calcular o volume do reservatório e o volume do boiler:

$$V_{reservatório} = 2 \cdot 2 \cdot h \Rightarrow V_{reservatório} = 4h. \quad V_{boiler} = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot H \Rightarrow V_{boiler} = \pi \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{4h}{\pi}\right) \Rightarrow V_{boiler} = h.$$

Assim, vê-se que $\frac{V_{reservatório}}{V_{boiler}} = \frac{4h}{h} = 4$.

Questão 3 - ESPCEX (AMAN) 2015 (Escola Preparatória de Cadetes do Exército (Academia Militar das Agulhas Negras))

Um cone de revolução tem altura 4 cm e está circunscrito a uma esfera de raio 1 cm. O volume desse cone em cm^3 é:

- (a) $\frac{1}{3}\pi$ (b) $\frac{2}{3}\pi$ (c) $\frac{4}{3}\pi$ (d) $\frac{8}{3}\pi$ (e) 3π

Solução

Considere o esboço abaixo da projeção ortogonal da figura formada. Sendo A o centro da esfera, veja que $AG = 1$ e $AB = 3$. Aplicando o Teorema de Pitágoras em ABG , temos

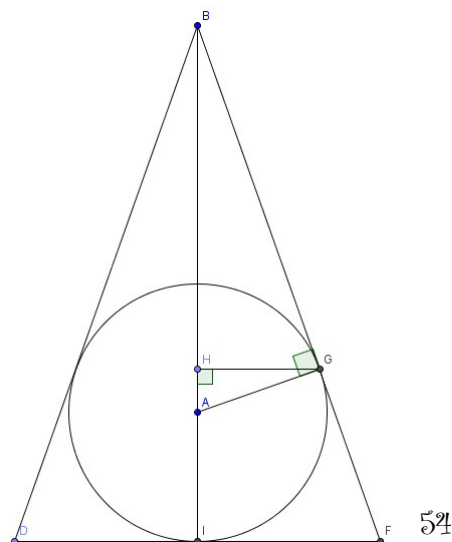
$$AG^2 + BG^2 = AB^2 \Rightarrow BG = \sqrt{3^2 - 1^2} \Rightarrow BG = 2\sqrt{2}.$$

Observe agora que a distância HI corresponde a $\frac{2}{3}$ do

diâmetro da esfera. Assim

$$HI = \frac{4}{3} \text{ e } HB = BI - HI \Rightarrow HB = 4 - \frac{4}{3} \Rightarrow HB = \frac{8}{3}.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras em BGH :



$$BG^2 = BH^2 + GH^2 \Rightarrow GH = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{8}{3}\right)^2} \Rightarrow GH = \sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow GH = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Observe que o segmento FI é equivalente ao raio r do cone. Usando semelhança de triângulos

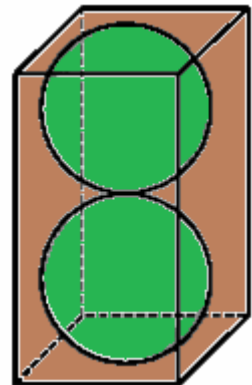
entre BGH e BIF, temos: $\frac{BH}{HG} = \frac{BI}{IF} \Rightarrow \frac{\frac{8}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{4}{r} \Rightarrow \frac{8r}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \Rightarrow r = \sqrt{2}.$

O volume do cone então pode ser facilmente calculado:

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 4}{3} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{8\pi}{3}. \text{ A resposta é a alternativa (d).}$$

Questão 4 - FATEC 2003 (Faculdade de Tecnologia de São Paulo)

Duas esferas maciças iguais e tangentes entre si estão inscritas em um paralelepípedo reto-retângulo oco, como mostra a figura abaixo. Observe que cada esfera tangencia as quatro faces laterais e uma das bases do paralelepípedo. O espaço entre as esferas e o paralelepípedo está preenchido com um líquido. Se a aresta da base do paralelepípedo mede 6 cm, o volume do líquido nele contido, em litros, é aproximadamente igual a



- (a) 0,144 (b) 0,206 (c) 1,44 (d) 2,06 (e) 20,6

Solução

Observe que o diâmetro da esfera será equivalente à medida do lado da base quadrado do paralelepípedo reto-retângulo. Assim, o raio da esfera é de 3 cm. A altura do paralelepípedo é equivalente ao diâmetro de duas esferas, ou seja, mede 12 cm. De posse desses dados, vamos calcular o volume do paralelepípedo e o volume das esferas:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = 12 \cdot 6 \cdot 6 \Rightarrow V_{\text{paralelepípedo}} = 432. \quad V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi \cdot 3^3}{3} \Rightarrow V_{\text{esfera}} = 36\pi.$$

O volume do líquido contido, considerando $\pi = 3,14$ deverá ser

$$V_{\text{líquido}} = V_{\text{paralelepípedo}} - 2V_{\text{esfera}} \Rightarrow V_{\text{líquido}} = 432 - 72\pi \Rightarrow V_{\text{líquido}} = 432 - 72 \cdot 3,14 \Rightarrow V_{\text{líquido}} = 432 - 226,08 \Rightarrow V_{\text{líquido}} = 205,92 \approx 206 \text{ cm}^3 = 0,206 \text{ l}.$$

Alternativa (b).

Questão 5

A CET (Companhia de Engenharia de Tráfego) de São Paulo necessita encomendar 40 cones grandes e 25 cones pequenos. O cone grande tem altura de 72 cm e utiliza uma base de sustentação quadrada de 40 cm, no qual há um círculo concêntrico a esse quadrado com diâmetro 25 cm. O cone pequeno de altura 50 cm tem $\frac{256}{625}$ do volume do cone grande e a base quadrada é proporcional ao diâmetro do cone grande.

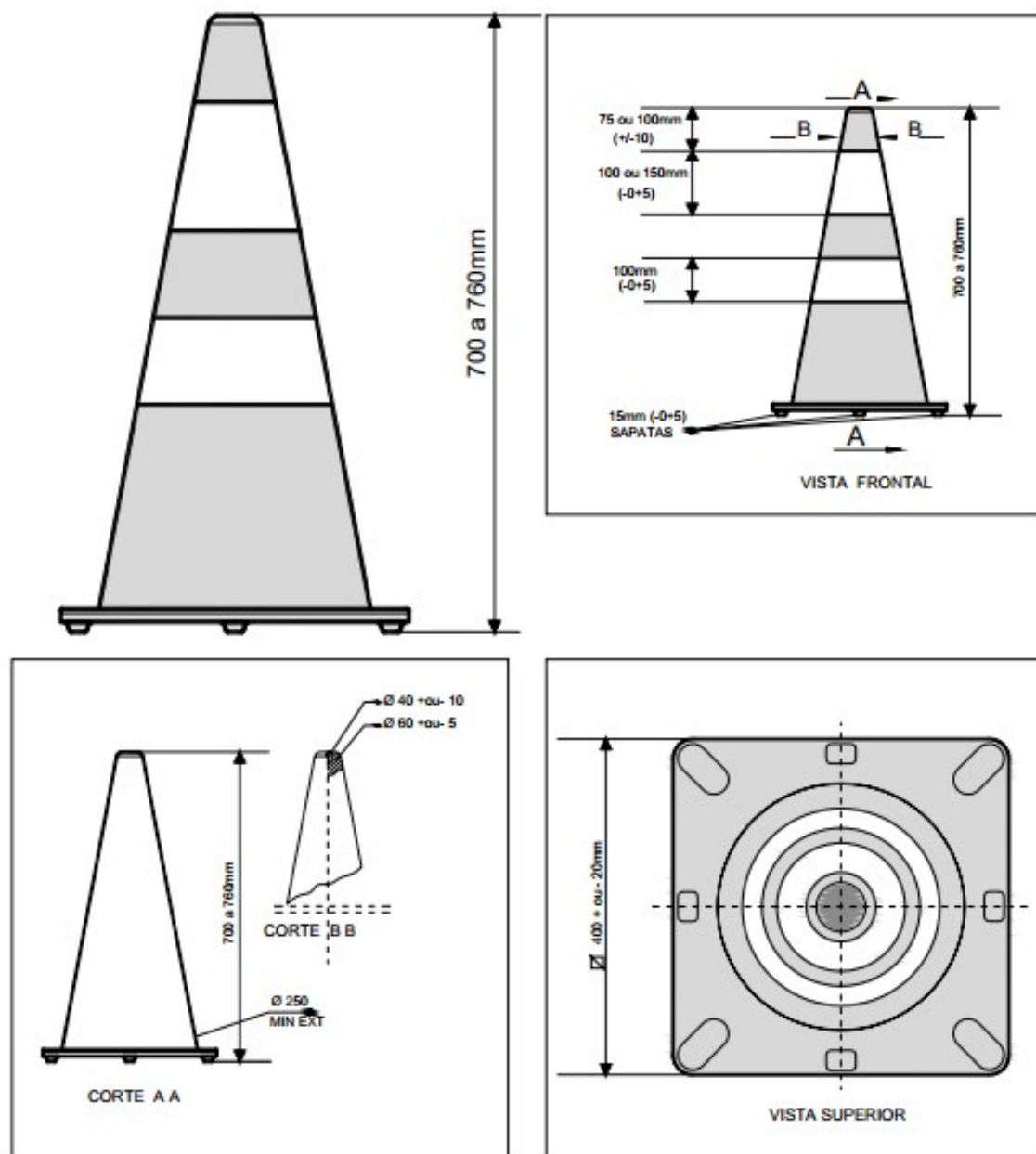


Figura A1 – Cone para sinalização viária

Determine a área total necessária de plástico para produzir todos esses cones. Despreze a espessura do cone e considere-os com formato perfeito de cone, supondo sua extremidade fechada.

Solução

Inicialmente, vamos calcular o volume do cone grande, sabendo que este tem 12,5 m de raio de base e altura de 72 m:

$$V_{\text{cone grande}} = \frac{\pi \cdot 12,5^2 \cdot 72}{3} \Rightarrow V_{\text{cone grande}} = 3750\pi.$$

Do enunciado, temos que $V_{\text{cone pequeno}} = \frac{256}{625} \cdot V_{\text{cone grande}}$. Daí, temos que

$$V_{\text{cone pequeno}} = \frac{256}{625} \cdot 3750\pi \Rightarrow V_{\text{cone pequeno}} = 1536\pi$$

Como a altura do cone pequeno é de 50 cm, sendo r seu raio de base, temos:

$$V_{\text{cone pequeno}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 50}{3} \Rightarrow 1536\pi = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 50}{3} \Rightarrow 50r^2 = 4608 \Rightarrow r^2 = 92,16 \Rightarrow r = 9,6.$$

Vamos calcular agora a área de plástico usada em cada cone, lembrando que temos uma base quadrada e a área lateral do cone. Antes, precisamos calcular a geratriz de cada um dos cones. Temos:

$$\text{Cone grande: } G = \sqrt{h^2 + r^2} \Rightarrow G = \sqrt{72^2 + 12,5^2} \Rightarrow G = \sqrt{\frac{21361}{4}} \Rightarrow G = \frac{\sqrt{21361}}{2}.$$

$$\text{Cone pequeno: } g = \sqrt{h^2 + r^2} \Rightarrow g = \sqrt{50^2 + 9,6^2} \Rightarrow g = \sqrt{\frac{64804}{25}} \Rightarrow g = \frac{2\sqrt{16201}}{5}.$$

Além disso, precisamos saber a medida do lado da base do quadrado ℓ do cone menor. Como os cones são proporcionais, temos $\frac{\ell}{40} = \frac{19,2}{25} \Rightarrow \ell = 30,72$.

A área de plástico utilizada será:

$$\text{Cone grande: } A = \pi \cdot 12,5 \cdot \left(\frac{\sqrt{21361}}{2}\right) + 40^2 - \pi \cdot 12,5^2 \Rightarrow A = 12,5\pi \left(\frac{\sqrt{21361}}{2} - 12,5\right) + 1600.$$

$$\text{Cone pequeno: } A = \pi \cdot 9,6 \cdot \left(\frac{2\sqrt{16201}}{5}\right) + 30,72^2 - \pi \cdot 9,6^2 \Rightarrow A = 9,6\pi \left(\frac{2\sqrt{16201}}{5} - 9,6\right) + 943,7184.$$

A área total de plástico necessária será então:

$$A_{\text{plástico}} = 40A_{\text{grande}} + 25A_{\text{pequeno}} \Rightarrow$$

$$A_{\text{plástico}} = 40 \left(12,5\pi \left(\frac{\sqrt{21361}}{2} - 12,5 \right) + 1600 \right) + 25 \left(9,6\pi \left(\frac{2\sqrt{16201}}{5} - 9,6 \right) + 943,7184 \right) \Rightarrow$$

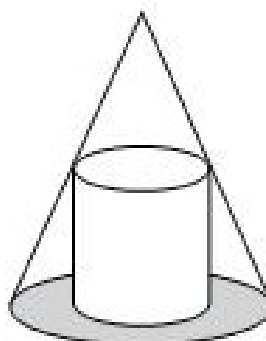
$$A_{\text{plástico}} = 500\pi \left(\frac{\sqrt{21361}}{2} - 12,5 \right) + 64000 + 240\pi \left(\frac{2\sqrt{16201}}{5} - 9,6 \right) + 23592,96 \Rightarrow$$

$$A_{\text{plástico}} = 20\pi \left(25 \left(\frac{\sqrt{21361}}{2} - 12,5 \right) + 12 \left(\frac{2\sqrt{16201}}{5} - 9,6 \right) \right) + 87592,96.$$

Questão 6 - CEFERJ 2011 (Centro Estadual de Estatísticas, Pesquisas e Formação de Servidores do Rio de Janeiro)

A figura abaixo mostra um cilindro reto inscrito em um cone: a base inferior do cilindro está sobre a base do cone, e a circunferência da base superior do cilindro está sobre a superfície lateral do cone. Sabe-se que a altura do cilindro é a metade da altura do cone e que o volume do cilindro é de 150cm^3 . O volume do cone é:

- (a) 200 cm^3
- (b) 240 cm^3
- (c) 300 cm^3
- (d) 360 cm^3
- (e) 400 cm^3



Solução

Seja h o volume do cilindro, $2h$ o volume do cone, r o raio do cilindro e $2r$ o raio do cone. Temos: $V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 150 = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow r^2 \cdot h = \frac{150}{\pi}$.

O volume do cone será $V_{cone} = \frac{\pi \cdot (2r)^2 \cdot 2h}{3} \Rightarrow V_{cone} = \frac{8\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V_{cone} = \frac{8\pi \cdot (\frac{150}{\pi})}{3} \Rightarrow V_{cone} = 400 \text{ cm}^3$.

Alternativa (e).

Questão 7

Douglas está com fome e pretende ir à sorveteria para consumir um delicioso sorvete de baunilha. O formato do sorvete comprado é semelhante ao mostrado abaixo, tendo a forma de um cone circular reto de 12cm de altura e 5 cm de raio da base.



Sabendo que 100 g de sorvete fornecem uma energia de 200 kcal, determine a quantidade mínima de sorvetes de baunilha que Douglas deve comprar para que ele supra suas necessidades energéticas diárias de 8400 kJ.

Dados: densidade média do sorvete de baunilha: 475 g/l, $\pi = 3$, 1 cal = 4,2 J.

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 4

(e) 5

Solução

O volume de cada sorvete deverá ser:

$$V_{sorvete} = V_{semiesfera} + V_{cone} \Rightarrow V_{sorvete} = \frac{4\pi \cdot 5^3}{6} + \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} \Rightarrow V_{sorvete} = 250 + 300 \Rightarrow V_{sorvete} = 550 \text{ cm}^3 = 0,55 \text{ l}.$$

Assim, a massa m de cada sorvete será $m = 0,55 \cdot 475 \Rightarrow m = 261,25 \text{ g}$.

Então, cada sorvete fornecerá $\frac{200 \cdot 261,25}{100} = 522,5 \text{ kcal}$.

Como $8400 \text{ kJ} = 2000 \text{ kcal}$, temos que serão necessários $\frac{2000}{522,5} = 3,82 \approx 4$ sorvetes. Alternativa (d).

Questão 8

Como já foi visto anteriormente (vide questão 15 do nível médio), uma gota d'água pode ser decomposta em um cone e uma semiesfera. Descreva uma fórmula para determinar seu volume total e determine o maior volume possível dessa gota se $h + R = 8$.



Solução

O volume da gota será equivalente à soma do volume do cone com o volume da semiesfera.

$$\text{Assim, } V_{\text{gota}} = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{cone}} \Rightarrow V_{\text{gota}} = \frac{2\pi \cdot R^3}{3} + \frac{\pi \cdot R^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V_{\text{gota}} = \frac{\pi \cdot R^2(2R+h)}{3}.$$

Veja que $R = 8 - h$. Substituindo, e igualando a 0 para verificar o ponto máximo, temos:

$$V_{\text{gota}} = \frac{\pi \cdot R^2(2R+h)}{3} \Rightarrow V_{\text{gota}} = \frac{\pi \cdot (8-h)^2(2(8-h)+h)}{3} \Rightarrow V_{\text{gota}} = \frac{\pi \cdot (64-16h+h^2)(16-h)}{3} \Rightarrow$$

$$V_{\text{gota}} = \frac{\pi \cdot (-h^3+32h^2-320h+1024)}{3} \Rightarrow V_{\text{gota}} = \frac{-\pi h^3}{3} + \frac{32\pi h^2}{3} - \frac{320\pi h}{3} + \frac{1024\pi}{3} \Rightarrow -\pi h^2 + \frac{64\pi h}{3} - \frac{320\pi}{3} = 0 \Rightarrow$$

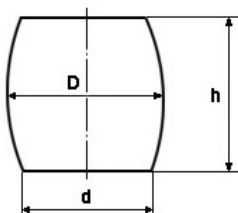
$$h_1 = 8, h_2 = \frac{40}{3}.$$

Mas se $h = 8$, então $R = 0$, o que é impossível. Assim, o valor máximo para o volume será

$$V_{\text{máximo da gota}} = \frac{\pi \cdot (8 - (\frac{40}{3}))^2(2(8 - (\frac{40}{3})) + (\frac{40}{3}))}{3} \Rightarrow V_{\text{máximo da gota}} = \frac{\pi \cdot ((\frac{256}{9})(\frac{8}{3}))}{3} \Rightarrow V_{\text{máximo da gota}} = \frac{2048\pi}{81}.$$

Questão 9

Na série de televisão mexicana criada por Roberto Gómez Bolaños, El Chavo del Ocho (conhecida como Chaves no Brasil), o personagem principal, Chaves, frequentemente aparece dentro de seu barril, utilizado em várias situações como esconderijo. Considere o seguinte esboço simplificado do barril:



A fórmula que calcula o volume desse barril é $V = \frac{\pi \cdot h(2D^2 + d^2)}{12}$. Considere um barril hipotético

de altura $\frac{12}{11}m$. Se d , D e V são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão x , e d e D são termos consecutivos de uma progressão aritmética, também de razão x , determine o volume desse barril. (Use $\pi = 3$.)

Solução

Como d , D e V estão numa PG, segue que $D = dx$ e $V = d^2 \cdot x$. Substituindo os termos na fórmula e usando $\pi = 3$, temos

$$V = \frac{\pi \cdot h (2D^2 + d^2)}{12} \Rightarrow d^2 \cdot x = \frac{3 \cdot \left(\frac{12}{11}\right) (2(dx)^2 + d^2)}{12} \Rightarrow 11d^2 \cdot x = 3 \cdot d^2 (2x^2 + 1) \Rightarrow 6x^2 - 11x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{3}{2}.$$

Assim, como d e D estão em PA, temos $D = d + x$ e $dx = d + x$. Daí, temos

$$\frac{d_1 \cdot 1}{3} = d_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow d_1 = \frac{-1}{2} \quad \text{e também} \quad \frac{d_2 \cdot 3}{2} = d_2 + \frac{3}{2} \Rightarrow d_2 = 3. \quad \text{Então, como } d \text{ é positivo, o volume do barril será } V = 3^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow V = 13,5.$$

Questão 10

Considere um cilindro de altura h . Seja $V(h)$ o volume do cilindro em função de sua altura. É válido que

$$V(x^2 + xy + V(y)) = (V(x))^2 + xV(y) + y$$

Para todo valor de x e y . O valor do raio da base desse cilindro é:

- (a) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{\pi}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$ (e) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}$

Solução

Para $x = 0$, temos $V(V(y)) = y + V(0)^2$ para todo $y \in \mathbb{R}$ e então V é uma função bijetora. Então existe um a tal que $V(a) = 0$. Então, para $x = y = a$, temos que

$$V(2a^2) = a \Rightarrow 0 = V(a) = V(V(2a^2)) = 2a^2 + V(0)^2 \text{ e } V(0) = 0 = a.$$

Assim, temos que $V(-x) = V(x)$, e esta é uma função ímpar. Logo, $V(x) = x$.

Como a altura do cilindro é h , temos $\pi \cdot r^2 \cdot h = h \Rightarrow r^2 = \frac{1}{\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi}$. Alternativa (d).

Questão 11

Considere um cone cuja altura é dada por h e o raio da base é dado por r . Sabe-se que h e r são números reais tais que $h^2 + r^2 = 1$. Determine o valor máximo para o volume desse cone.

Solução

Veja que $r^2 = 1 - h^2$. Substituindo na fórmula do volume do cone, temos

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot (1 - h^2) \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi \cdot h}{3} - \frac{\pi \cdot h^3}{3}$$

Para descobrir o maior valor possível de h , determinamos as raízes para $V = 0$. Assim, temos

$$\frac{\pi}{3} - \pi \cdot h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = \frac{\frac{\pi}{3}}{\pi} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{3}. \text{ Assim, o valor de } r \text{ será } r = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{O volume do cone será } V = \frac{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}{3} \Rightarrow V = \frac{2\pi\sqrt{3}}{81}.$$

Questão 12

O volume de um cone de raio 1 e altura sendo o triplo do raio da base é numericamente equivalente a área superficial de uma esfera. Calcule:

- (a) A área superficial total de um cilindro reto equilátero com o mesmo raio da esfera;
- (b) O volume de um cone com medida de geratriz equivalente ao quádruplo do raio da esfera e área superficial total igual à do cilindro calculada anteriormente.

Solução

Primeiramente, temos que a altura do cone é 3 e seu volume é $V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot 1^2 \cdot 3}{3} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \pi$. Como este é equivalente a área superficial da esfera, temos $4\pi r^2 = \pi \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

(a) O raio do cilindro será 0,5. Como este cilindro é equilátero, segue $h = 2r$. Assim,

$$A_{\text{total}} = 2\pi \cdot r \cdot (h + r) \Rightarrow A_{\text{total}} = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)\right) \Rightarrow A_{\text{total}} = \frac{3\pi}{2}.$$

(b) A medida da geratriz do cone será 2. A área superficial total de um cone é dada por $A_{\text{total}} = \pi r(r + g)$. Então, como esta é igual a do cilindro calculado anteriormente, temos que

$$\frac{3\pi}{2} = \pi \cdot r \cdot (r + 2) \Rightarrow 3\pi = 2\pi r^2 + 2\pi r \Rightarrow 2\pi r^2 + 2\pi r - 3\pi = 0 \Rightarrow r_1 = \frac{\sqrt{7}-1}{2}, r_2 = \frac{-\sqrt{7}-1}{2}.$$

Como r é positivo, segue que $r = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$. Sabe-se que $h^2 + r^2 = g^2$. Substituindo pelos dados

$$\text{conhecidos: } h^2 + \left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow h^2 = 4 - \left(\frac{4-\sqrt{7}}{2}\right) \Rightarrow h = \sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{2}} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{2}.$$

$$\text{O volume do cone será então } V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{2}\right)}{3} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot (4-\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{8+2\sqrt{7}})}{12} \Rightarrow$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot (4-\sqrt{7}) \cdot (\sqrt{2(4+\sqrt{7})})}{12} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{(4-\sqrt{7})^2 \cdot 2(4+\sqrt{7})}}{12} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{18(4-\sqrt{7})}}{12} \Rightarrow$$

$$V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{9(8-2\sqrt{7})}}{12} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{3\pi \cdot \sqrt{8-2\sqrt{7}}}{12} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot \sqrt{8-2\sqrt{7}}}{4} \Rightarrow V_{\text{cone}} = \frac{\sqrt{7}-1}{4} \pi.$$

Obsevação: $\sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{7}-1$. (Verifique! ☺☺☺)

Gabarito Simplificado

● Nível Fácil

- Questão 1 – (d)
Questão 2 – (c)
Questão 3 – (d)
Questão 4 – (a)
Questão 5 – (b)
Questão 6 – (a) 2304π ; (b) 4608π
Questão 7 – (d)
Questão 8 – (e)
Questão 9 – (c)
Questão 10 – (b)
Questão 11 – (a)
Questão 12 – Demonstração (ver página 36)
Questão 13 – $\frac{144\pi}{5} \text{ cm}^3$.
Questão 14 – (a)
Questão 15 – (e)
Questão 16 – (b)
Questão 17 – 1458 bolinhas de Natal
Questão 18 – (e)
Questão 19 – 7 minutos e 51 segundos
Questão 20 – $70980\pi \text{ m}^3$.
Questão 21 – $\frac{4}{5}$ ou 0,8.

● Nível Médio

- Questão 1 – $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$.
Questão 2 – (b)
Questão 3 – (d)
Questão 4 – (b)
Questão 5 – (c)
Questão 6 – Não.
Questão 7 – (c)
Questão 8 – 12
Questão 9 – (d)
Questão 10 – (a)
Questão 11 – $\frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$.

Questão 12 – (b)
Questão 13 – (c)
Questão 14 – (c)
Questão 15 – 2
Questão 16 – (b)
Questão 17 – (a)

● Nível Difícil

Questão 1 – $\sqrt[3]{98}$
Questão 2 – 4
Questão 3 – (d)
Questão 4 – (b)
Questão 5 – $20\pi(25(\frac{\sqrt{21361}}{2}-12,5)+12(\frac{2\sqrt{16201}}{5}-9,6))+87592,96.$
Questão 6 – (e)
Questão 7 – (d)
Questão 8 – $\frac{2048\pi}{81}$
Questão 9 – 13,5
Questão 10 – (d)
Questão 11 – $\frac{2\pi\sqrt{3}}{81}$

Questão 12 – (a) $\frac{3\pi}{2}$; (b) $\frac{\sqrt{7}-1}{4}\pi.$